# 2026학년도 서강대학교
# 모의논술 자료집 1차
## - 자연계열 -

서강대학교 입학처

# 목 차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

---

# 제시문

**[가] 코사인법칙**

삼각형 ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

**[나] 삼각형의 넓이**

삼각형 ABC의 넓이를 $S$라고 하면

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$

**[다] 합성함수의 미분**

두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

**[라]** 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치가 $x = f(t)$, $y = g(t)$일 때, 점 P의 시각 $t$에서의 속력은

$$\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$$

## 문제

좌표평면 위를 움직이는 두 점 P와 Q는 다음 조건을 만족한다. (단, O는 원점)

(i) $\overline{\mathrm{OP}} = 1$이고 점 P의 $y$좌표는 양수이다.

(ii) 점 Q는 $x$축 위에 있고 $x$좌표는 양수이다.

(iii) $\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【1-1】 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 삼각형 PHQ의 넓이의 최댓값을 구하시오.

【1-2】 $\angle \mathrm{POQ} = \theta$일 때, 삼각형 POQ의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\cos\theta\, d\theta$의 값을 구하시오. (단, $\theta$는 라디안이고 $0 < \theta < \pi$)

【1-3】 문항 【1-2】에서 구한 함수 $f(\theta)$는 열린구간 $(0, \pi)$에서 $\theta = \alpha$일 때 최댓값을 가진다. $\cos\alpha$의 값을 구하시오.

【1-4】 점 Q의 시각 $t$에서의 위치가 $x = t$, $y = 0$이라고 하자. 점 P의 시각 $t = a$에서의 위치가 $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$일 때, 점 P의 시각 $t = a$에서의 속력을 구하시오. (단, $\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1 < t < \dfrac{\sqrt{6}}{2} + 1$)

# ▢ 출제의도 및 채점기준

## 1. 출제의도

· 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 삼각형 넓이의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.
· 삼각형에서 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.
· 삼각함수의 적분 및 치환적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지 평가한다.
· 삼각형의 넓이를 다양한 방법으로 구할 수 있는지 평가한다.
· 좌표평면 위를 움직이는 점의 시각 $t$에서의 속력을 나타내고, 코사인법칙을 활용하여 속력을 구할 수 있는지 평가한다.

## 2. 문항해설

제시문 **[가]**, **[나]**, **[다]**, **[라]**는 고등학교 〈수학Ⅰ〉, 〈미적분〉 교과서에서 그대로 발췌하여 제시하였다. 네 개의 제시문은 모든 교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의, 설명으로, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있도록 구성되었다. 문제를 해결할 때 사용된 핵심 용어는 ‘이차함수의 최대, 최소’, ‘코사인법칙’, ‘합성함수 미분법’, ‘정적분’, ‘속력’으로 이는 교육과정에 모두 부합한다.

■ 문항 【1-1】은 주어진 삼각형의 넓이를 변수를 사용하여 나타내고 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 삼각형 넓이의 최댓값을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 삼각형의 넓이를 구하는 문제는 모든 수학과목 교과서에서 다루고 있고 이차함수의 최대, 최소는 모든 〈수학〉 교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 교육과정을 충실히 이수한 학생은 어려움 없이 해결할 수 있을 것으로 판단된다.

■ 문항 【1-2】는 삼각형에서 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 넓이를 $\theta$에 관한 함수로 나타내고, 이 함수와 관련된 정적분을 삼각함수의 적분 및 치환적분법을 활용하여 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 삼각형에서 코사인법칙을 활용하는 문제는 모든 〈수학Ⅰ〉 교과서에서, 삼각함수의 적분 및 치환적분법을 활용하여 정적분의 값을 구하는 문제는 모든 〈미적분〉 교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결 할 수 있을 것으로 판단된다.

■ 문항 【1-3】은 함수 $f(\theta)$의 기하학적 의미를 이용하여 최댓값을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 함수 $f(\theta)$의 도함수를 활용하여 최댓값을 찾는 방법은 매우 복잡하다. 하지만 함수 $f(\theta)$가 삼각형 POQ의 넓이라는 사실을 이용하면 최댓값을 어렵지 않게 구할 수 있다. 삼각형의 넓이를 활용하는 문제는 모든 수학과목 교과서에서 다루고 있으므로, 문항 【1-2】에서 함수 $f(\theta)$의 기하학적 의미를 잘 이해한다면 충분히 해결할 수 있을 것으로 판단된다.

■ 문항 【1-4】는 $\angle\mathrm{POQ}$를 활용하여 점 P의 시각 $t$에서의 위치와 속력을 나타내고, 코사인법

칙을 활용하여 $\angle$POQ와 시각 $t$의 관계식을 구하여 시각 $t=a$에서의 점 P의 속력을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 삼각형에서 코사인법칙은 모든 <수학I> 교과서에서, 합성함수의 미분법 및 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력은 모든 <미적분> 교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 교육과정을 충실히 이수한 학생은 해결할 수 있을 것으로 판단된다.

## 3. 채점기준

**[채점기준]**

【1-1】

· 삼각형 PHQ의 넓이를 변수를 활용하여 나타낼 수 있다.

· 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 삼각형 PHQ의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.

【1-2】

· 코사인법칙을 활용하여 함수 $f(\theta)$를 구할 수 있다.

· 여러 가지 적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있다.

【1-3】

· 함수 $f(\theta)$의 기하학적 의미를 활용하여 최댓값을 구할 수 있다.

· 함수 $f(\theta)$가 $\theta=\alpha$에서 최대일 때, 직각삼각형을 활용하여 $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.

【1-4】

· 점 P의 시각 $t$에서의 위치와 속력을 $\angle$POQ를 활용하여 나타낼 수 있다.

· 코사인법칙을 활용하여 시각 $t$와 $\angle$POQ의 관계식을 구할 수 있다

· 합성함수의 미분법을 활용하여 점 P의 시각 $t=a$에서의 속력을 구할 수 있다.

## 4. 예시답안

【1-1】 $\overline{\mathrm{PH}}=h$라 하면, $0<h\le 1$이고 $\overline{\mathrm{HQ}}=\sqrt{\frac{3}{2}-h^2}$이 된다. 따라서 삼각형 PHQ의 넓이는

$$\frac{h}{2}\sqrt{\frac{3}{2}-h^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}h^2-h^4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{16}-\left(h^2-\frac{3}{4}\right)^2}$$

이므로 최댓값은 $\frac{3}{8}$이다.

【1-2】 삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의해 $\frac{3}{2}=\overline{\mathrm{OQ}}^2+1-2\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\cos\theta$이므로,

$\overline{\mathrm{OQ}}=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+\frac{1}{2}}$이고 제시문 **[나]**에 의해

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\left(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+\frac{1}{2}}\right)\sin\theta$$

따라서

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta+\frac{1}{2}}\,d\theta\right)$$

첫 번째 적분에서 $\cos\theta=u$, 두 번째 적분에서 $\cos^2\theta+\frac{1}{2}=u$라 두면

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}u^2\,du+\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\sqrt{u}}{2}\,du\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{2\sqrt{2}}{8}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{7+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{48}$$

【1-3】 함수 $f(\theta)$는 $\angle\mathrm{POQ}=\theta$일 때, 삼각형 POQ의 넓이다. $\angle\mathrm{OPQ}=\beta$라 하면 삼각형 POQ의 넓이는 $\frac{\sqrt{6}}{4}\sin\beta$이고, $\beta=\frac{\pi}{2}$일 때 삼각형 POQ의 넓이가 최대가 된다. 이 경우 삼각형 POQ는 $\angle\mathrm{P}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{O}=\alpha$, $\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$인 직각삼각형이므로, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$이다.

【1-4】 시각 $t$에서 $\angle\mathrm{POQ}=\theta(t)$라 하면 점 P의 위치는 $x=\cos\theta(t)$, $y=\sin\theta(t)$이다. 따라서 제시문 **[라]**에 의해 점 P의 시각 $t$에서의 속력은 $\sqrt{\{-\theta'(t)\sin\theta(t)\}^2+\{\theta'(t)\cos\theta(t)\}^2}=|\theta'(t)|$이다. 그리고 $\overline{\mathrm{OQ}}=t$이므로 삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의해

$$\frac{3}{2}=t^2+1-2t\cos\theta(t)\quad\cdots\cdots\ (1)$$

$t=a$일 때 $\cos\theta(a)=\frac{1}{2}$이므로 식 (1)에 대입하면 $a^2-a-\frac{1}{2}=0$이고 $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$이다.

식 (1)을 정리하면 $\cos\theta(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{4t}$이고 양변을 $t$로 미분하면 $-\theta'(t)\sin\theta(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4t^2}$이 된다.

$t=a$일 때, $\sin\theta(a)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\theta'(a)=-\dfrac{1}{\sin\theta(a)}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4a^2}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4+2\sqrt{3}}\right)=1-\sqrt{3}$이다. 따라서, 점 P의 시각 $t=a$에서의 속력은 $\sqrt{3}-1$이다.