# 7. 문항카드 7 - 자연계열 2차 1번

## 7.1 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">논술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술(일반)전형</td></tr>
<tr><td>계열(과목)/문항번호</td><td colspan="3">자연계열 2차(물리학과, 전자공학과, 화공생명공학과, 인공지능학과)/1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학, 수학Ⅰ, 미적분, 기하</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">· 타원의 방정식<br>· 타원의 초점<br>· 접선의 방정식<br>· 삼각함수의 덧셈정리</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">40분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

## 7.2 문제 및 제시문(문항)

**[제시문]**

**[가]** 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > c > 0,\ b^2 = a^2 - c^2)$$

**[나]** 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

**[다]** $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$, $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

**[문제]**

**제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.**

**두 초점이** $\mathrm{F}(\sqrt{3}b, 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{3}b, 0)$**인 타원** $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **위의 점** $\mathrm{P}(x_1, y_1)$**이** $\angle \mathrm{F}'\mathrm{PF} = 90°$**를 만족시킨다. 문항 【1-1】과 【1-2】에 답하시오. (단,** $b > 0$**이고** $x_1 > 0$, $y_1 > 0$**)**

**【1-1】** $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}} = l_1$이고 $\overline{\mathrm{FP}} = l_2$라고 할 때, $l_1$과 $l_2$의 곱 $l_1 l_2$를 구하시오. 또한 $l_1$과 $l_2$를 각각 구하시오.

---

**【1-2】** 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$의 좌표를 구하시오.

**두 초점이** $\mathrm{F}(\sqrt{3}b, 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{3}b, 0)$**인 타원** $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **위의 점** $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$**가** $\angle \mathrm{F}'\mathrm{FQ}=135°$ **를 만족시킨다. 문항 【1-3】과 【1-4】에 답하시오. (단,** $b>0$ **이고** $x_2>0$, $y_2>0$**)**

**【1-3】** $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=l_3$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}=l_4$라고 할 때, $l_3$과 $l_4$를 각각 구하시오.

**【1-4】** 타원 $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 R이라고 하자. $\angle \mathrm{FQR}=\theta$라고 할 때, $\tan\theta$를 구하시오.

---

## 7.3 출제 의도

· 주어진 조건에 맞는 타원을 좌표평면 위에 그릴 수 있는지 평가한다.
· 타원에 대한 기본적인 성질을 이용하고 이를 이용하여 타원 위의 점들과의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.
· 수직인 두 직선의 기울기의 곱을 알고 있는지 평가한다.
· 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 이를 적절히 구할 수 있는지 평가한다.

## 7.4 출제 근거

### 7.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

| 적용교육과정 | 수학과 교육과정 제2015-74호 |
|---|---|
| **문항 및 제시문** | **학습내용 성취기준** |
| **제시문 전체** | · [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선<br>· [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.<br>· [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.<br>· [미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분<br>· [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. |
| **하위문항 【1-1】** | · [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선<br>· [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. |
| **하위문항 【1-2】** | · [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선<br>· [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.<br>· [수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식<br>· [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. |
| **하위문항 【1-3】** | · [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선<br>· [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.<br>· [수학 I ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수<br>· [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. |

| | |
|---|---|
| **하위문항【1-4】** | · [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선<br>· [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.<br>· [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.<br>· [미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분<br>· [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. |

### 7.4.2 자료 출처

| 교과서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|
| 수학 | 고성은 외 | 좋은책 신사고 | 2021 | 124 |
| 수학 | 이준열 외 | 천재교육 | 2021 | 130 |
| 수학 I | 류희찬 외 | 천재교과서 | 2022 | 102 |
| 수학 I | 박교식 외 | 동아출판 | 2021 | 89~90 |
| 미적분 | 권오남 | 교학사 | 2024 | 67 |
| 미적분 | 황선욱 외 | 미래엔 | 2020 | 67 |
| 기하 | 권오남 외 | 교학사 | 2024 | 21, 43 |
| 기하 | 홍성복 외 | 지학사 | 2021 | 17, 42 |

## 7.5 문항 해설

### 7.5.1 위원회 자체 평가 의견

■ 제시문 **[가]**와 **[나]**는 2015년 개정 교육과정 ‘[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선’, 제시문 **[다]**는 ‘[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분’에 관련된 내용이다. 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의와 정리가 제시되어 있으며, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있는 제시문들로 구성되어 있다.

■ 문항【1-1】은 주어진 타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리를 구하는 문제이다. 제시문 **[가]**의 타원의 정의로 부터 주어진 타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합을 구할 수 있다. 또한 주어진 각이 90°이므로 피타고라스 정리에 의하여 두 거리의 곱을 구할 수 있다. 이 두 거리는 이차방정식의 근이 되므로 각 거리를 구할 수 있다. 타원의 장축과 단축이 문자 $b$로 이루어져서 계산과정이 약간 복잡할 수 있으나, 타원의 기본 성질과 두 점 사이의 거리에 대한 개념만 알면 어렵지 않게 구할 수 있는 문제이다.

■ 문항【1-2】는 조건을 만족하는 타원 위의 점을 구하는 문제이다. 구하고자 하는 점에서 각 초점을 지나는 두 직선이 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 $-1$임을 이용하여 이 점의 좌표를 구할 수 있다. 여기 나오는 개념은 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 어려움 없이 해결할 것으로 판단된다.

■ 문항【1-3】은 문항【1-1】과 유사한 문제이다. 두 초점과 타원 위의 점으로 이루어진 삼각형에 대하

여 코사인법칙을 이용하면 문제의 두 길이를 구할 수 있다. <수학 I >과 <기하> 과목의 기본적인 내용이므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【1-4】는 제시문 **[나]**의 공식을 이용하여 타원 위의 주어진 점 Q에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다. 이 접선이 $x$축과 만나는 점 R의 좌표를 구한 후 세 점 F, R, Q로 이루어진 삼각형 FRQ에 대하여 제시문 **[다]**의 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 구하고자 하는 탄젠트 값을 구할 수 있다. 검정교과서에 공통으로 다루는 내용이므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

## 7.5.2 출제 검토 교사 의견

제시문 **[가]**, **[나]**, **[다]**는 고등학교 <기하>, <미적분> 교과서에서 발췌하여 교육과정을 준수하였고 문제해결의 방향을 명확히 제시하여 수험생이 문제를 해결하는 데 도움이 될 수 있도록 하였다. 세부 문항들은 교육과정 내 성취기준에 맞추어 출제되었으며, 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있을 정도의 난이도로 출제되었다.

문항 【1-1】은 제시문 **[가]**와 문제에서 주어진 조건을 이용하여 $l_1$과 $l_2$를 구하는 문제이다. 제시문 **[가]**로부터 $l_1$과 $l_2$의 합을 구할 수 있고, 문제에 주어진 $\angle F'PF = 90^\circ$ 임을 이용하여 ${l_1}^2 + {l_2}^2$의 값을 구할 수 있으며, 두 식을 연립하여 $l_1 l_2$의 값을 쉽게 구할 수 있다. 또한 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $l_1$과 $l_2$를 두 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있고 이를 풀면 $l_1$과 $l_2$의 값 또한 어렵지 않게 계산할 수 있다.

문항 【1-2】는 문제에 주어진 조건인 $\angle F'PF = 90^\circ$ 를 만족시키는 점 P의 좌표 $(x_1, y_1)$을 구하는 문제이다. $(x_1, y_1)$을 주어진 타원의 방정식에 대입하여 얻은 관계식과 두 점 F′과 P를 지나는 직선, 두 점 F와 P를 지나는 직선이 수직일 조건을 이용하여 얻은 관계식을 연립하여 $x_1$과 $y_1$를 충분히 구할 수 있다. 또한 $\angle F'PF = 90^\circ$ 이므로 세 점 $F', F, P$가 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OF} = \sqrt{3}b$ 인 원 $x^2 + y^2 = 3b^2$ 위의 점임을 이용하여 관계식 ${x_1}^2 + {y_1}^2 = 3b^2$을 이용할 수도 있으며, 타원의 방정식과 원의 방정식의 교점을 구하는 방법으로도 문제를 해결할 수 있다. 교육과정을 충실히 학습한 학생이면 다양한 방법으로 문제를 해결할 수 있게 출제되었다.

문항 【1-3】은 주어진 조건을 이용하여 $l_3$과 $l_4$를 구해야 한다는 점에서 문항 【1-1】에서와 유사한 점이 있다. $\angle F'FQ = 135^\circ$ 이므로 삼각형 F′FQ에서 코사인법칙을 이용하여 $l_3$과 $l_4$의 관계식을 구할 수 있고, 이 관계식과 $l_3 + l_4$의 값을 이용하여 $l_3$과 $l_4$를 충분히 구할 수 있다. 또한 $l_3$과 $l_4$의 관계식을 구할 때 코사인법칙뿐만 아니라 점 S를 $S(x_2, 0)$라 하면 $x_2 = \sqrt{3}b + l_4 \cos 45^\circ = \sqrt{3}b + \dfrac{\sqrt{2}}{2} l_4$, $y_2 = l_4 \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} l_4$이므로 삼각형 QF′S에서 피타고라스 정리를 이용할 수도 있다.

문항 【1-4】는 제시문 **[나]**와 **[다]**를 이용하여 충분히 해결할 수 있다. 두 점 F와 Q를 지나는 직선의 방정식을 구하여 이를 타원의 방정식과 연립하여 이차방정식을 풀면 점 Q의 좌표 $(x_2, y_2)$를 쉽게 구할 수 있다. 제시문 **[나]**에서 주어진 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여 점 R의 좌표 또한 쉽게 구할 수 있다. 두 점 Q와 R의 좌표를 이용하여 직선 QR의 기울기를 알 수 있고 탄젠트함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan\theta$ 또한 어렵지 않게 구할 수 있다. 또한 점 Q에서 $x$축에 수선의 발을 내리고 탄젠트함수의 덧셈정리를 이용하는 방법으로도 $\tan\theta$의 값을 구할 수 있으며, 직선 QR의 기울기를 구할 때 타원 위의 점 Q에서의 접선의 기울기를 이용할 수도 있다. 모든 문항은 고등학교 교육과정 내에서 다루고

있는 내용이며, 다양한 방법의 풀이가 존재하는 문항으로 학생의 수학적 사고 능력을 다각적으로 알아볼 수 있는 문항이다. 전체적인 문제의 난이도는 평이하며 학교 수업에 충실히 임하고 교과서 내용을 잘 학습한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문항이다.

## 7.5.3 자문위원 평가 의견

다음은 자문위원들에게 각 제시문과 문항에 대해 '고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?'라는 질문과 '고등학교 교육과정 수준에 적정한가?'라는 질문에 '전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다'를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하고 제시문과 문항 난이도에 대해 '매우 쉽다, 쉽다, 보통이다, 어렵다, 매우 어렵다'를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여한 결과를 정리한 내용이다. 수치는 5점 만점이며 평균을 소수점 셋째 자리에서 반올림하여 소수점 둘째 자리까지 표시하였다.

제시문 **[가]**는 <기하> 과목의 성취기준인 '[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.'에 대한 내용이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.93으로 매우 높게 나왔다.

제시문 **[나]**는 <기하> 과목의 성취기준인 '[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.'에 대한 내용이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.93으로 매우 높게 나왔다.

제시문 **[다]**는 <미적분> 과목의 성취기준인 '[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.'에 대한 내용이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.93으로 매우 높게 나왔다.

문항 【1-1】은 주어진 조건을 이용하여 $l_1l_2$의 값을 구하고 제시문 **[가]**로부터 $l_1+l_2=4b$임을 알아내어 두 관계식을 연립하여 $l_1$, $l_2$의 값을 구하는 문항으로 <기하> 과목의 성취기준인 '[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.'에 근거하여 출제되었다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.93, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.87로 매우 높게 나왔다.

문항 【1-2】는 타원의 방정식과 두 직선의 수직 조건을 이용하여 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$의 좌표를 구하는 문항으로 <기하> 과목의 성취기준인 '[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.', <수학> 과목의 성취기준인 '[10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.'에 근거하여 출제되었다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.80, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.73으로 매우 높게 나왔다.

문항 【1-3】는 $l_3+l_4=4b$와 삼각형 $\mathrm{QF'F}$에 코사인법칙을 이용하여 얻은 관계식을 연립하여 $l_3$, $l_4$의 값을 구하는 문항으로 <기하> 과목의 성취기준인 '[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.', <수학 I> 과목의 성취기준인 '[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.'에 근거하여 출제된 문항이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.73, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.67로 매우 높게 나왔다.

문항 【1-4】는 제시문 **[나]**로부터 타원 위의 점에서의 접선이 방정식을 구하고, 제시문 **[다]**로부터 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan\theta$를 구하는 문항으로 <기하> 과목의 성취기준인 '[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.', '[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.', <미적분> 과목의 성취기준인 '[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.'에 근거하여 출제된 문항이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.87, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.80으로 매우 높게 나왔다.

따라서 모든 제시문과 문항은 고등학교 교육과정 안에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다. 또한, 제시문의 난이도 평균은 1.67로 매우 평이하다고 판단하였으며 문항의

난이도 평균은 3.10로 보통 수준으로 판단하였다. 따라서, 제시문과 문항은 고등학교 교육과정의 <수학>, <수학 I >, <기하>, <미적분> 과목을 정상적으로 이수한 학생이라면 큰 어려움 없이 해결하고, 풀이 과정을 표현할 수 있을 것이라고 판단된다.

## 7.6 채점 기준

고등학교 교육과정에서 다루는 기하 및 삼각함수의 기본적인 내용을 바탕으로 평면 위의 두 점 사이의 거리, 타원의 방정식, 두 직선의 수직 관계, 코사인법칙과 삼각함수의 덧셈정리 등을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에서 활용할 수 있는지를 평가한다. 특히, 타원의 방정식이 하나의 문자를 포함한 경우에도 점들 간의 거리와 삼각함수 값을 올바르게 구하고, 그 과정을 논리적으로 서술할 수 있는지를 확인한다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

- 문항 【1-1】은 제시문 **[가]**의 타원의 정의로부터 타원 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 합을 구하고 직각삼각형의 피타고라스 정리를 이용하여 두 거리의 곱을 구할 수 있는지 평가한다. 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 각 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【1-2】는 두 직선의 수직일 때 두 직선의 기울기의 곱이 $-1$임을 이용하여 점 P의 좌표를 구할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【1-3】은 점 Q와 두 초점으로 이루어진 삼각형에 대하여 코사인법칙을 적용하여 점 Q에서 두 초점까지의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【1-4】는 제시문 **[나]**의 공식을 이용하여 점 Q에서 접선의 방정식을 구하고, 이 접선이 $x$축과 만나는 점, 초점 F, 점 Q로 이루어진 삼각형에 대하여 제시문 **[다]**의 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트 값을 구할 수 있는지 평가한다.

## 7.7 답안 사례

---

【1-1】 삼각형 F′PF가 직각 삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 $l_1^2 + l_2^2 = (2\sqrt{3}\,b)^2 = 12b^2$ 이다. 따라서 $(l_1 + l_2)^2 - 2l_1l_2 = l_1^2 + l_2^2 = 12b^2$ 이다. 타원의 정의에 의하여 $l_1 + l_2 = 4b$이므로, $(4b)^2 - 2l_1l_2 = 12b^2$이고 $l_1l_2 = 2b^2$이다. 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 $l_1$과 $l_2$는 $t$에 관한 이차방정식 $t^2 - (4b)t + 2b^2 = 0$의 근이다. 이를 풀면, $t = 2b \pm \sqrt{2}\,b$이고 $l_1 > l_2$이므로

$$l_1 = (2+\sqrt{2})b, \qquad l_2 = (2-\sqrt{2})b$$

【1-2】 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$가 타원 $\dfrac{x^2}{4b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위에 있으므로

$$\frac{x_1^2}{4b^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad --- \quad \text{(a)}$$

---

$\angle F'PF = 90^\circ$ 이므로 두 점 F′와 P를 지나는 직선의 기울기 $\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}b}$과 두 점 F와 P를 지나는 직선의 기울기 $\frac{y_1}{x_1-\sqrt{3}b}$은 $\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}b} \times \frac{y_1}{x_1-\sqrt{3}b} = -1$을 만족시킨다. 따라서

$$x_1^2 = 3b^2 - y_1^2 \quad \text{---} \quad \text{(b)}$$

식 (b)를 식 (a)에 대입하면 $\frac{3b^2-y_1^2}{4b^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$이므로 $3y_1^2 = b^2$이다. $y_1 > 0$이므로 $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}b$이고 식 (b)에 대입하면 $x_1^2 = 3b^2 - y_1^2 = 3b^2 - \frac{1}{3}b^2 = \frac{8}{3}b^2$이다. $x_1 > 0$이므로 $x_1 = \sqrt{\frac{8}{3}}b = \frac{2\sqrt{6}}{3}b$ 이다. 따라서

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}b, \frac{\sqrt{3}}{3}b\right)$$

【1-3】 $\angle F'FQ = 135^\circ$ 이다. 삼각형 QF′F에 코사인법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} l_3^2 &= l_4^2 + (2\sqrt{3}b)^2 - 2l_4(2\sqrt{3}b)\cos 135^\circ \\ &= l_4^2 + 12b^2 + 2\sqrt{6}\,b\,l_4 \end{aligned}$$

$l_3 + l_4 = 4b$이므로 $l_3 = 4b - l_4$를 위의 식에 대입하면 $(4b-l_4)^2 = l_4^2 + 12b^2 + 2\sqrt{6}\,b\,l_4$이고 좌변을 전개한 후 계산하면 $l_4 = \frac{4}{8+2\sqrt{6}}b = \frac{4-\sqrt{6}}{5}b$이고 $l_3 = \frac{16+\sqrt{6}}{5}b$이다.

【1-4】 두 점 $Q(x_2, y_2)$와 $F(c, 0)$을 지나는 직선은 기울기가 $\tan 45^\circ = 1$이므로 $y = x - \sqrt{3}b$이다. 따라서

$$y_2 = x_2 - \sqrt{3}b \quad \text{---} \quad \text{(c)}$$

또한 $Q(x_2, y_2)$는 타원 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위에 있으므로

$$\frac{x_2^2}{4b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{---} \quad \text{(d)}$$

을 만족시킨다. 식 (c)를 (d)에 대입하여 정리하면 $5x_2^2 - 8\sqrt{3}bx_2 + 8b^2 = 0$이므로 이차방정식의 근의 공식에 의해 $x_2 = \frac{1}{5}(4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2})b$이다. $x_2 > \sqrt{3}b$이어야 하므로 $x_2 = \frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5}b$이고 식 (c)에 대입하면 $y_2 = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}b$이다. 따라서

$$Q(x_2, y_2) = Q\left(\frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5}b, \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}b\right)$$

제시문 [나]에 의하여 점 Q에서 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{10b}x + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5b}y = 1$$

$y = 0$일 때 $x = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})b$이므로 점 R의 $x$좌표는 $x_3 = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})b$이다. 점 Q에서 $x$축에 내린 수선의 발을 점 $S(x_2, 0)$라 하고 $\angle QRS = \alpha$라고 하면 $\tan\alpha = \frac{y_2}{x_3 - x_2} = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$이다.

$\theta = 135^\circ - \alpha$이므로 제시문 [다]로부터

$$\tan\theta = \tan(135^\circ - \alpha) = \frac{\tan 135^\circ - \tan\alpha}{1 + \tan 135^\circ \tan\alpha} = \frac{-1 - \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{3}$$

# 8. 문항카드 8 - 자연계열 2차 2번

## 8.1 일반정보

| 유형 | 논술고사 | | |
|---|---|---|---|
| 전형명 | 논술(일반)전형 | | |
| 계열(과목)/문항번호 | 자연계열 2차(물리학과, 전자공학과, 화공생명공학과, 인공지능학과)/2번 | | |
| 출제범위 | 교육과정 과목명 | 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분 | |
| | 핵심개념 및 용어 | · 삼각함수<br>· 미분계수<br>· 도함수<br>· 도함수의 활용<br>· 정적분 | · 여러가지 함수의 미분<br>· 여러가지 미분법<br>· 여러가지 적분법 |
| 예상 소요 시간 | 60분 | | / 100 분 |

## 8.2 문제 및 제시문(문항)

**[제시문]**

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 $x_1, x_2$에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.
또 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

[나] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 $(a, b)$에서 미분가능할 때
① 열린구간 $(a, b)$에서 $f'(x) > 0$이면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다.
② 열린구간 $(a, b)$에서 $f'(x) < 0$이면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

[다] 함수 $y = f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $a + \Delta x$까지 변할 때, 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y = f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $y = f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 $x$에서 미분가능하면 함수 $y = f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

**[문제]**

**제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.**

**두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.**

| | |
|---|---|
| (i) $f(x) \le g(x)$ | (ii) $\{g(x)-f(x)\}^2+\sin^2 f(x)=1$ |

【2-1】 함수 $f(x)$가 $f(x)=10x$일 때, 정적분 $\int_0^\pi g(x)dx$의 값을 구하시오.

【2-2】 함수 $f(x)$가 $f(x)=x$일 때, 함수 $g(x)$가 열린구간 $(0, \pi)$에서 미분가능한지 조사하시오. 또한 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가함을 보이시오.

【2-3】 함수 $f(x)$가 $f(x)=x$일 때, 방정식 $g(x)-kx+\frac{\pi}{2}(k-1)=0$이 $0 \le x \le \pi$에서 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 양의 실수 $k$의 값의 범위를 구하시오.

【2-4】 함수 $g(x)$가 $g(x)=x$일 때, $f'(a)=\frac{2}{3}$를 만족시키는 실수 $a$의 값을 구하시오. $\left(단, \frac{\pi}{2}<a<\pi+1\right)$

## 8.3 출제 의도

· 삼각함수의 주기성을 이용하여 정적분을 구할 수 있는지 평가한다.
· 미분계수의 정의를 이용하여 함수의 미분가능성을 조사할 수 있는지, 도함수를 활용하여 함수의 증가 또는 감소를 판단할 수 있는지 평가한다.
· 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지 평가한다.
· 합성함수의 미분법 및 삼각함수 미분을 활용하여 함수 $f(x)$의 미분계수가 특정한 값이 되는 $x$의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

## 8.4 출제 근거

### 8.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

| 적용교육과정 | 수학과 교육과정 제2015-74호 |
|---|---|
| **문항 및 제시문** | **학습내용 성취기준** |
| **제시문 전체** | · [수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용<br>· [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.<br>· [수학Ⅱ] - (2) 미분 - ①미분계수<br>· [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. |
| **하위문항【2-1】** | · [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 |

| | |
|---|---|
| | · [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.<br>· [수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분<br>· [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.<br>· [미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법<br>· [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. |
| **하위문항【2-2】** | · [수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{1}$ 미분계수<br>· [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.<br>· [수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용<br>· [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.<br>· [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분<br>· [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. |
| **하위문항【2-3】** | · [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용<br>· [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.<br>· [수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용<br>· [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. |
| **하위문항【2-4】** | · [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수<br>· [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.<br>· [미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법<br>· [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. |

## 8.4.2 자료 출처

| 교과서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|
| 수학Ⅰ | 이준열 외 | 천재교육 | 2021 | 82, 91 |
| 수학Ⅰ | 박교식 외 | 동아출판 | 2021 | 72, 82 |
| 수학Ⅱ | 고성은 외 | 좋은책신사고 | 2020 | 53~56, 80~81, 123~124 |
| 수학Ⅱ | 김원경 외 | 비상교육 | 2022 | 51~53, 78~80, 117 |
| 수학Ⅱ | 배종숙 외 | 금성출판사 | 2021 | 55~57, 83~85, 126 |
| 수학Ⅱ | 이준열 외 | 천재교육 | 2021 | 53~55, 83~85, 124 |
| 수학Ⅱ | 홍성복 외 | 지학사 | 2020 | 54~55, 83~84, 131~132 |
| 수학Ⅱ | 황선욱 외 | 미래엔 | 2021 | 53~55, 82~83, 125 |
| 미적분 | 김경원 외 | 비상교육 | 2022 | 67~68, 79~80, 104~105, 124 |
| 미적분 | 권오남 외 | 교학사 | 2020 | 74~75, 88~89, 120~121, 143 |
| 미적분 | 류희찬 외 | 천재교과서 | 2020 | 80~81, 103~104, 135~136, 159 |
| 미적분 | 홍성복 외 | 지학사 | 2021 | 73~75, 88~89, 120~121, 142 |

## 8.5 문항 해설

### 8.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 **[가]**와 **[나]**는 2015년 개정 교육과정 '[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용', 제시문 **[다]**는 '[수학Ⅱ] - (1) 미분 - ① 미분계수'에 관련된 내용이다. 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의, 정리, 설명이 제시되어 있으며, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있는 제시문들로 구성되어 있다.

- 문항 【2-1】은 조건을 만족하는 함수 $g(x)$를 구하고 다항함수 및 삼각함수의 적분법 및 삼각함수의 주기성을 이용하여 정적분을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 삼각함수의 주기성, 다항함수와 삼각함수의 적분법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 이 내용들을 체계적으로 잘 적용한다면 교육과정을 충실히 이수한 학생은 어려움 없이 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【2-2】는 제시문 **[다]**를 바탕으로 미분계수의 정의로부터 구간에서의 함수의 미분가능성을 조사하고 제시문 **[나]**를 이용하여 함수 $g(x)$가 증가함수임을 보일 수 있는지를 평가하는 문항이다. 미분가능성을 조사하고 도함수를 이용하여 함수의 증가 또는 감소를 조사하는 방법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 어려움 없이 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【2-3】은 도함수를 활용하여 주어지 구간에서 방정식이 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 양의 실수 $k$의 범위를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구하는 문제는 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【2-4】는 조건을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 합성함수의 미분법을 활용하여 미분계수 $f'(a)$가 $\frac{2}{3}$가 되는 실수 $a$의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 특히, 함수 $f(x)$를 직접 구하지 않고 합성함수 미분법을 이용하여 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하고 $f'(a)=\frac{2}{3}$의 값을 갖는 $a$의 값을 주어진 범위에서 찾을 수 있는지를 평가한다. 문항의 해결에 이용되는 내용들은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 이 내용들을 체계적으로 잘 적용한다면 충분히 해결할 것으로 판단된다.

### 8.5.2 출제 검토 교사 의견

제시문 **[가]**, **[나]**, **[다]**는 <수학Ⅱ> 교과서에서 문제 풀이에 필요한 내용을 발췌하여 수험생이 문제를 해결하는 데 도움이 될 수 있게 제시되었다. 세부 문항들은 교육과정 내 성취기준에 맞추어 출제되었었으며, 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있을 정도의 난이도로 출제되었다.

문항 【2-1】은 주어진 조건을 이용하여 함수 $g(x)$를 구하고, 정적분의 값을 구하는 문제이다. 삼각함수의 성질을 이용하여 함수 $g(x)$를 쉽게 구할 수 있으며 정적분의 계산 또한 간단하게 할 수

있다. 절댓값을 포함하고 있는 삼각함수의 정적분 값을 구해야 하는데, 이는 삼각함수의 주기성을 이용하고 적분 구간을 나누는 과정을 통하여 어렵지 않게 구할 수 있으며 이 문제 해결을 통해 전체적인 문제의 방향성을 알아낼 수 있다.

문항 【2-2】는 주어진 조건을 이용하여 함수 $g(x)$를 구한 후 열린구간 $(0, \pi)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능한지 조사하고, 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가함을 보이는 문제이다. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$일 때와 $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$일 때로 구간을 나누어 함수 $g(x)$를 구하면 함수 $g(x)$는 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서는 미분가능 하나, 제시문 **[다]**에서 주어진 미분가능의 정의를 이용하면 함수 $g(x)$는 $x = \frac{\pi}{2}$에서 미분가능하지 않음을 충분히 알 수 있다. 또한 제시문 **[나]**의 내용을 이용하여 구간별로 $g'(x)$의 부호를 조사하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가함을 쉽게 알 수 있다.

문항 【2-3】은 문항 【2-2】에서 구한 함수 $g(x)$와 미분을 이용하여 주어진 방정식의 실근이 $0 \le x \le \pi$에서 오직 하나임을 보이는 문제이다. $x = \frac{\pi}{2}$가 주어진 방정식의 근이므로 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서는 실근을 갖지 않음을 보이면 된다. $k$의 범위를 나누어 함수의 증가, 감소를 판단하고 실근을 갖지 않기 위한 조건을 이용하면 $k$의 값의 범위를 충분히 구할 수 있다. 또한 기하적인 방법을 이용하여 문제를 풀 수도 있는데, 주어진 방정식을 $g(x) = kx - \frac{\pi}{2}(k-1)$로 변형하여 $y = g(x)$, $y = kx - \frac{\pi}{2}(k-1)$의 그래프를 각각 그린 후 $0 \le x \le \pi$에서 두 함수의 그래프의 교점이 한 개여야 함을 이용해 $k$의 값을 구할 수도 있다.

문항 【2-4】는 문항 【2-1】, 【2-2】, 【2-3】과 달리 함수 $g(x)$에 대한 조건을 주었다. 이는 앞 문항과 관계식을 유도하는 과정은 같지만 다른 방법을 이용하여 문제를 해결해야 한다는 점에서 학생들의 문제해결력을 측정하는 데 적합한 문항으로 보인다. 합성함수의 미분과 $f'(a) = \frac{2}{3}$임을 이용하여 새로운 관계식을 쉽게 찾을 수 있고, $\cos f(a)$의 값이 $0$인지, $0$보다 큰지, $0$보다 작은지에 따라 경우를 나누어 $f(a)$의 범위와 $\sin f(a)$의 값을 각각 구하여 조건을 만족시키는 $a$의 값을 구할 수 있다. 문항은 전체적으로 주어진 조건과 삼각함수, 미분법, 적분법 등을 이용하여 다양한 방법으로 문제에 접근하고 해결할 수 있도록 출제되었다. 학생들의 수학적 사고 능력 및 창의성을 측정할 수 있는 문항이라고 판단되며 학교 수업에 충실히 임하고 교과서 내용을 잘 학습한 학생이라면 모두 충분히 해결할 수 있는 문항이 출제되었다.

## 8.5.3 자문위원 평가 의견

다음은 자문위원들에게 각 제시문과 문항에 대해 '고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?'라는 질문과 '고등학교 교육과정 수준에 적정한가?'라는 질문에 '전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다'를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하고 제시문과 문항 난이도에 대해 '매우 쉽다, 쉽다, 보통이다, 어렵다, 매우 어렵다'를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여한 결과를 정리한 내용이다. 수치는 5점 만점이며 평균을 소수점 셋째 자리에서 반올림하여 소수점 둘째 자리까지 표시하였다.

제시문 **[가]**는 <수학Ⅱ> 과목의 성취기준인 '[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.'에 대한 내용이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 5.00으로 매우 높게 나왔다.