5. 문항카드 5 - 자연계열 1차 1번

5.1 일반정보

유형	논술고사	
전형명	논술(일반)전형	
계열(과목)/문항번호	자연계열 1차(수학과, 기계공학과, 컴퓨터공학과, 시스템반도체공학과)/1번	
출제범위	교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	· 쌍곡선의 방정식 · 이차곡선의 접선 · 사인법칙과 코사인법칙 · 두 점 사이의 거리 · 절대부등식
예상 소요 시간	40분	/ 100 분

5.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F'으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라고 하며, 두 점 F, F'을 쌍곡선의 초점이라고 한다.

[나] 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } c > a > 0,\ b^2 = c^2 - a^2 \text{)}$$

[다] 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

[문제]

제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(5, 0)$과 $\mathrm{B}(-5, 0)$에 대하여 같은 평면 위의 점 C와 점 P는 다음 조건을 동시에 만족시킨다.

(i) $\overline{\mathrm{AC}} = 6$
(ii) 점 P는 선분 AC 위에 있다.
(iii) $\overline{\mathrm{BP}} + \overline{\mathrm{CP}} = 8$

【1-1】 점 P가 그리는 도형이 쌍곡선의 일부가 됨을 보이고, 이 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

【1-2】 문항 【1-1】에서 구한 쌍곡선 위의 점 Q에서의 접선이 y축과 만나는 점을 R이라고 하자. $\overline{\mathrm{QR}}$이 최소가 되는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 제2사분면 위에 있고 O는 원점이다.)

【1-3】 점 C와 점 P가 일치할 때, 선분 BC가 y축과 만나는 점을 D라고 하자. $\angle\mathrm{COD} = \alpha$라고 할 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, O는 원점이고 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

【1-4】 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{A} = \theta$일 때, 삼각형 BCP의 넓이를 $f(\theta)$라고 하자. $\cos\beta = \frac{4}{5}$를 만족시키는 β에 대하여 $f'(\beta)$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\text{이고, 점 C는 선분 AB 위에 있지 않으며 점 P와 일치하지 않는다.}\right)$

5.3 출제 의도

· 쌍곡선의 정의를 활용하여 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
· 쌍곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
· 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.
· 함수가 최솟값을 가질 조건을 구하기 위해 산술평균과 기하평균을 이용한 절대부등식을 활용할 수 있는지 평가한다.
· 삼각함수의 성질을 활용하여 삼각형에서 사인법칙과 코사인법칙을 활용할 수 있는지 평가한다.
· 쌍곡선의 정의를 활용하여 삼각형의 넓이를 함수로 나타낼 수 있는지 평가한다.
· 여러 가지 미분법을 활용하여 도함수를 구할 수 있는지 평가한다.

5.4 출제 근거

5.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용교육과정	수학과 교육과정 제2015-74호
문항 및 제시문	**학습내용 성취기준**

제시문 전체	· [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 · [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. · [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.
하위문항【1-1】	· [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 · [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
하위문항【1-2】	· [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 · [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다. · [수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표 · [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. · [수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제 · [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.
하위문항【1-3】	· [수학I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 · [12수학I02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
하위문항【1-4】	· [기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 · [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. · [수학I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 · [12수학I02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. · [미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 · [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.

5.4.2 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수학	권오남 외	교학사	2021	102, 198, 199
수학 I	고성은 외	좋은책 신사고	2022	83, 92, 93, 95, 99
수학 I	홍성복 외	지학사	2020	87, 96, 97, 99
미적분	이준열 외	천재교육	2021	84
기하	고성은 외	좋은책 신사고	2021	22, 46
기하	권오남 외	교학사	2024	29, 49
기하	이준열 외	천재교육	2023	26, 27
기하	홍성복 외	지학사	2021	23, 46

5.5 문항 해설

5.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 **[가]~[다]**는 2015년 개정 교육과정 '[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선'에 관련된 내용이다. 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 정리와 설명이 제시되어 있으며, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있는 제시문들로 구성되어 있다.

- 문항 【1-1】은 주어진 조건과 제시문 [가]와 [나]를 활용하여 쌍곡선의 정의를 이해하고, 쌍곡선의 방정식을 조건으로부터 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 문제를 해결하는 방법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 쉽게 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【1-2】는 제시문 [다]를 이용하여 주어진 곡선 위의 한 점에서 접선의 방정식을 구하고, 접점과 접선이 축과 만나는 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 평가한다. 또한, 이 거리를 표현하는 함수의 최솟값을 산술평균과 기하평균을 이용한 절대부등식을 활용하여 계산할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식, 두 점 사이의 거리, 함수의 최솟값을 구하는 방법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【1-3】은 좌표평면 위의 주어진 세 점이 이루는 삼각형에 대해 변의 길이와 각의 크기를 알 때, 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 변의 길이와 각의 크기가 주어진 삼각형에서 사인법칙과 코사인법칙을 적용하여 변의 길이 또는 각의 크기를 구하는 방법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【1-4】는 제시문 [가]와 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 특정 변수에 대한 함수로 나타내고, 이 함수의 도함수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 삼각형에서 코사인법칙을 활용하는 방법과 함수의 몫의 미분법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

5.5.2 출제 검토 교사 의견

주어진 문항은 고등학교 기하 과목의 성취기준을 준수하여 출제되었으며, 기하학적인 성질과 수학Ⅰ의 삼각함수 및 미적분을 활용하여 문항을 해결할 수 있도록 구성되어 있다. 학생은 쌍곡선과 삼각함수의 성질을 기반으로 하여 종합적인 사고를 통해 문항을 해결할 수 있으며, 각 문항은 고등학교 교육과정에 맞춰 난이도가 적절하며 해결 방향을 명확하게 제시하고 있다.

문항 【1-1】은 쌍곡선의 정의를 이용해 점이 그리는 도형이 쌍곡선임을 보이고, 이를 통해 쌍곡선의 방정식을 구하는 문제이다. 제시문 [가]의 쌍곡선의 정의에 의해 점이 그리는 도형은 쌍곡선의 일부임을 보일 수 있고, 주어진 조건을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구하는 과정은 직관적이므로 학생들이 어렵지 않게 해결할 수 있다. 이 문제는 기하학적 이해와 방정식 도출 능력을 평가하는 문제로, 고등학교 기하 과목을 충실히 이수한 학생이라면 어렵지 않게 해결할 수 있을 것이다.

문항 【1-2】는 쌍곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 이 점과 접선의 절편과의 거리를 구하는 문항이다. 제시문 [나]의 내용을 통해 쌍곡선 위의 한 점에서 접선의 방정식을 구할 수 있으며, 이를 통해 얻은 식을 정리하여 산술평균과 기하평균을 활용하는 절대부등식을 이용해 선분의 길이가 최소가 되는 점의 좌표를 구하고, 이를 통해 문항을 해결할 수 있다. 이 과정은 기하학적 사고와 산술평균과 기하평균을 활용하는 절대부등식에 대한 이해를 요구하며, 문제해결력을 필요로 한다. 수학적 사고를 바탕으로 주어진 조건을 잘 활용하면 학생들이 문제를 해결하는 데 어려움이 없을 것으로 판단된다.

문항 【1-3】은 주어진 조건을 바탕으로 삼각함수의 성질과 사인법칙을 이용해 문제를 해결하도록 출제되었다. 삼각형에서 삼각함수의 기본 성질을 이해한 학생은 직각삼각형을 쉽게 찾아낼 수 있으며, 직각삼각형에서 삼각함수를 사용하여 각의 사인, 코사인 값을 구하고 이를 통해 주어진 값을 간단하게 계산할 수 있다. 또한, 삼각형의 변의 길이를 구하고, 사인법칙이나 삼각함수 각 변환을 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 이 문제는 수학Ⅰ에서 다룬 기본적인 삼각함수 성질을 잘 활용한 문제로, 학생들이 삼각함수의 성질을 잘 이해하고 있다면 어렵지 않게 해결할 수 있는 문제이다.

문항 【1-4】는 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 함수를 구하고, 이를 미분하여 값을 구하는 문제이다. 코사인법칙을 사용하여 삼각형의 변과 각의 관계를 나타내고, 이 관계를 통해 삼각형의 넓이를 구하는 함수를 정의하고 삼각형 넓이의 차이를 이용해 함수를 구하고, 이를 미분하여 특정 값을 구할 수 있다. 이 문항은 기하학적인 성질과 미적분을 결합한 문제로, 기하학적 사고뿐만 아니라 미분법을 잘 이해하고 있어야 해결할 수 있다. 코사인법칙을 활용한 기하학적 문제에 미분을 결합한 이 문제는 학생들의 문제해결력을 측정할 수 있는 좋은 문제로 생각되며, 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 비교적 쉽게 해결할 수 있는 문항이다.

전체적으로, 제시된 문항은 고등학교 교육과정에 충실히 맞춰 출제되었으며, 난이도는 평이한 편이다. 각 문항은 기하, 삼각함수, 미적분 등의 수학적 개념을 종합적으로 활용하도록 구성되어 있어, 학생들이 다양한 수학적 도구를 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가할 수 있으며 제시문 **[가]**, **[나]**, **[다]**에서 제공된 정보들은 문제 해결에 중요한 역할을 하고 각 문항은 문제 해결의 방향성을 명확히 제시하고 있다. 학생들이 교과서에서 학습한 내용을 잘 이해하고 응용할 수 있도록 돕는 교육적 가치가 높은 문항들이 출제되었다. 제시문과 문항들은 고등학교 기하 교육과정의 성취기준을 충실히 반영하며, 기하학적 사고, 삼각함수, 미적분의 이해와 적용을 요구하는 문항들로 구성되있다. 각 문항은 학생들이 교과서에서 배운 내용을 바탕으로 문제를 풀 수 있게 돕고, 교육적 의미가 크다. 전체적으로 문제 난이도는 평이하며, 고등학교 교육과정을 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있을 것이다.

5.5.3 자문위원 평가 의견

다음은 자문위원들에게 각 제시문과 문항에 대해 ‘고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?’라는 질문과 ‘고등학교 교육과정 수준에 적정한가?’라는 질문에 ‘전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하고 제시문과 문항 난이도에 대해 ‘매우 쉽다, 쉽다, 보통이다, 어렵다, 매우 어렵다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여한 결과를 정리한 내용이다. 수치는 5점 만점이며 평균을 소수점 셋째 자리에서 반올림하여 소수점 둘째 자리까지 표시하였다.

제시문 **[가]**는 <기하> 과목의 성취기준인 ‘[12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다’에 대한 내용이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.93으로 매우 높게 나왔다.

제시문 **[나]**는 <기하> 과목의 성취기준인 ‘[12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다’에 대한 내용이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 5.00으로 매우 높게 나왔다.

제시문 **[다]**는 <기하> 과목의 성취기준인 ‘[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다’에 부합하며, 쌍곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구하는 내용이다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 5.00으로 매우 높게 나왔다.

문항 【1-1】은 <기하> 과목의 성취기준인 ‘[12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다’에 근거하여 출제되었다. 제시문 **[가]**와 **[나]**에서 쌍곡선의 정의를 활용하여, 거리 차가 일정한

점 P의 자취가 쌍곡선임을 증명하고 방정식을 도출하는 과정을 통해 문제를 해결할 수 있다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.87, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.80으로 높게 나왔다.

문항 【1-2】는 <기하> 과목의 성취기준인 '[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다'에 근거하여 출제되었다. 제시문 **[다]**를 활용하여 쌍곡선 위의 점에서 접선의 방정식을 구하고, 접선이 축과 만나는 점에서 선분 길이가 최소가 되는 조건을 찾기 위해 두 점 사이의 거리를 구하고, 절대부등식인 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최소 길이를 구하면 문제를 해결할 수 있다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.87, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.87로 높게 나왔다.

문항 【1-3】은 <수학Ⅰ> 과목의 성취기준인 '[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다'와 '[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다'에 근거하여 출제되었다. 삼각함수와 쌍곡선을 활용하는 문제이며, 주어진 조건을 바탕으로 사인법칙을 이용하여 삼각형의 각을 구하고, 이를 통해 문제를 해결할 수 있다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.73, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.67로 높게 나왔다.

문항 【1-4】는 <수학Ⅰ> 과목의 성취기준인 '[12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고 활용할 수 있다'와 <미적분> 과목의 성취기준인 '[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다'에 근거하여 출제되었다. 삼각형의 넓이를 함수로 설정하고, 이를 미분하여 도함수를 구하는 문제이며, 코사인법칙을 이용해 삼각형의 넓이를 구하고, 미적분에서 배운 삼각함수의 미분법과 몫의 미분을 활용하여 값을 구할 수 있다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.87, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.73으로 높게 나왔다.

따라서 모든 제시문과 문항은 고등학교 교육과정 안에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 내용과 출제되었다고 판단할 수 있다. 또한, 제시문의 난이도는 평균 1.60, 문제의 난이도는 2.80으로 제시문과 문항의 난이도 모두 평이하다고 판단하였다. 문제는 기하와 벡터, 삼각함수 등 다양한 수학적 개념을 활용하는 문제로, 제시문에서 쌍곡선의 정의와 방정식 등을 제시하여 학생들이 쉽게 이해하고 풀 수 있도록 구성되었다. 문항 【1-1】~【1-3】은 기하적 접근을 통해 계산을 통해 풀 수 있으며, 문항 【1-4】는 미적분을 활용한 삼각형의 넓이 구하기 문제로 약간의 복잡함이 있지만 난이도가 높은 편은 아니므로 <수학Ⅰ>, <미적분>, <기하> 등을 고루 이해하고 연습한 학생들은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

5.6 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루는 기하의 기본 개념을 바탕으로, 도형의 방정식, 삼각함수, 그리고 함수의 도함수를 이해하고 이를 다양한 상황에 적용할 수 있는지를 평가한다. 특히, 쌍곡선의 정의, 두 점 사이의 거리, 접선의 방정식, 사인법칙과 코사인법칙을 좌표평면 위의 쌍곡선과 삼각형에 활용할 수 있는지를 중점적으로 다룬다. 또한, 함수의 미분을 활용하여 함수의 최솟값을 구하는 능력을 평가한다. 제시문에는 문제 해결에 필요한 관련 교과서 내용을 포함하였으며, 이를 통해 주어진 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다. 이전에 해결한 문항과 제시문을 활용하여 문제를 풀 수 있는 구조로 구성하였다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

- 문항 【1-1】은 제시문 **[가]**와 **[나]**에서 주어진 쌍곡선의 정의를 이용하여, 제시된 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식을 이끌어 낼 수 있는지 평가한다.

- 문항 【1-2】는 제시문 **[다]**를 이용하여 쌍곡선 위의 한 점에서 접선의 방정식을 구하고, 접점과 접선

이 y축과 만나는 점의 거리를 식으로 나타낸 후, 거리가 최솟값을 가질 때 조건을 구할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【1-3】은 좌표평면 위의 삼각형의 세 각의 크기와 세 변의 길이를 이용하여 삼각함수의 사인법칙, 코사인법칙을 활용하여 $\cos\alpha$를 구할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【1-4】는 제시문 [가]와 [나]에서 주어진 쌍곡선의 정의를 이용하여 삼각형의 넓이를 θ에 관한 함수로 나타낸 후, 함수의 도함수를 계산할 수 있는지 평가한다.

5.7 답안 사례

【1-1】 세 조건에 의하여 $\overline{AP}+\overline{CP}=6$ 이고 $\overline{BP}+\overline{CP}=8$ 이므로 $\overline{BP}-\overline{AP}=2$ 이다. 따라서 점 P는 점 A와 점 B로부터의 거리의 차가 2인 쌍곡선 위에 있다. 점 $A(5,0)$과 점 $B(-5,0)$은 쌍곡선의 두 초점이고, 거리의 차는 2이므로 제시문 [나]에 의해 쌍곡선의 방정식은

$$x^2-\frac{y^2}{24}=1$$

【1-2】 제 2사분면에 있는 쌍곡선 위의 한 점 $Q(x_2, y_2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x_2x-\frac{y_2y}{24}=1$$

점 R의 좌표는 $\left(0,-\frac{24}{y_2}\right)$이고, $x_2^2-\frac{y_2^2}{24}=1$을 이용하면

$$\overline{QR}^2=x_2^2+\left(y_2+\frac{24}{y_2}\right)^2=49+\frac{25}{24}y_2^2+\frac{24^2}{y_2^2}$$

산술평균과 기하평균을 이용하여 절대부등식을 적용하면,

$$\overline{QR}^2=49+\frac{25}{24}y_2^2+\frac{24^2}{y_2^2}\ \geq\ 49+2\sqrt{\frac{25}{24}y_2^2\times\frac{24^2}{y_2^2}}=49+20\sqrt{6}$$

이고, $\frac{25}{24}y_2^2=\frac{24^2}{y_2^2}$일 때 $\overline{QR}^2$이 최소이고 $\overline{QR}$도 최소이다. $\frac{25}{24}y_2^2=\frac{24^2}{y_2^2}$을 풀면,

$y_2^2=\frac{48\sqrt{6}}{5}$이고 $x_2^2=1+\frac{y_2^2}{24}=1+\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 이므로, 구하는 $\overline{OQ}^2$의 값은

$$\overline{OQ}^2=x_2^2+y_2^2=1+10\sqrt{6}$$

【1-3】 점 C와 점 P가 일치하면, 삼각형 ABC 는 $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=6$ 이고 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 원점 O가 빗변 AB 의 중점이므로 세 점 A, B, C는 중심이 원점 O이고 선분 AB가 지름인 원 위에 있다. 직각삼각형 ABC 에서 $\angle B=\theta$ 라 하면 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 이다. 또한 $\angle DOC=\alpha$ 이므로 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}+\alpha$ 이다. 선분 OC는 원의 반지름이므로 $\overline{OC}=5$ 이다. 삼각형 BOC에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\sin\theta} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

이므로

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \overline{\mathrm{BC}} \times \frac{\sin\theta}{\overline{\mathrm{OC}}} = \frac{24}{25}$$

【1-4】 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{AP}} = x$ 라 하면 $\overline{\mathrm{BP}} = x+2$ 이다. 삼각형 ABP 에서 코사인법칙을 적용하면

$$(x+2)^2 = x^2 + 10^2 - 20x\cos\theta$$

이므로

$$x = \frac{24}{5\cos\theta + 1}$$

따라서, 삼각형 BCP의 넓이 $f(\theta)$는

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (\text{삼각형 ABC의 넓이}) - (\text{삼각형 ABP의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2}\times 6\times 10\times \sin\theta - \frac{1}{2}\times 10\times \frac{24}{5\cos\theta+1}\times\sin\theta \\ &= 30\sin\theta - \frac{120\sin\theta}{5\cos\theta+1} \end{aligned}$$

$f(\theta)$의 도함수를 구하면,

$$f'(\theta) = 30\cos\theta - 120\frac{\cos\theta + 5}{(5\cos\theta+1)^2}$$

$\cos\beta = \frac{4}{5}$ 이므로

$$f'(\beta) = -\frac{96}{25}$$

6. 문항카드 6 - 자연계열 1차 2번

6.1 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="3">논술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="3">논술(일반)전형</td></tr>
<tr><td>계열(과목)/문항번호</td><td colspan="3">자연계열 1차(수학과, 기계공학과, 컴퓨터공학과, 시스템반도체공학과)/2번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>교육과정 과목명</td><td colspan="2">수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td colspan="2">· 문자와 식
· 삼각함수
· 함수의 극한과 연속
· 미분
· 미분법</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">60분</td><td>/ 100 분</td></tr>
</table>

6.2 문제 및 제시문(문항)

[제시문]

[가] x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

① 꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위 $\alpha \le x \le \beta$ 에 속하면 $f(\alpha), f(\beta), f(p)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② 꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위에 속하지 않으면 $f(\alpha), f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

[나] 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 극한값이 L이면 $x = a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 모두 L과 같다. 또 그 역도 성립한다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

[다] 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 정의되어 있고 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 연속이라고 한다. 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x에서 연속이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다.

[라] 함수 $f(x)$에서 극한값

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하

는 모든 x에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

[문제]

제시문 [가]~[라]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

양의 실수 t에 대하여 함수 $g(\theta)=\sqrt{(4\cos\theta-3t)^2+4t^2\sin^2\theta}$ $(0\le\theta<2\pi)$ 의 최솟값을 $f(t)$라고 하자.

【2-1】 $f(1)$의 값을 구하시오.

【2-2】 $0<t<1$일 때, $f(t)$를 구하시오.

【2-3】 $t>1$일 때, $f(t)$를 구하시오.

【2-4】 함수 $f(t)$의 $t=1$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

6.3 출제 의도

고등학교 필수 교육과정에 나오는 삼각함수와 이차함수의 최대·최소 문제 및 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 기본적인 내용을 이해하고 있는지 평가한다. 구체적인 출제 의도는 다음과 같다.

· 주어진 삼각함수의 최대·최소 문제를 간단한 치환을 통하여 이차함수의 최대·최소 문제로 바꿀 수 있는지 평가한다. 또한 이차함수의 최대·최소 문제를 해결하기 위하여 제시문의 내용을 올바르게 활용하는지 평가한다.
· 구간에서의 이차함수의 최솟값을 구하기 위하여 꼭짓점의 x좌표에 따라서 이차함수의 그래프가 어떻게 변하는지 정확하게 이해하고 있는지 평가한다.
· 함수의 연속성과 미분가능성의 개념을 정확하게 이해하고 있는지 평가한다. 이를 위해서 제시문에 주어진 함수의 극한, 연속성 및 미분가능성의 정의를 적절하게 활용할 수 있는지 평가한다.

6.4 출제 근거

6.4.1 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용교육과정	수학과 교육과정 제2015-74호
문항 및 제시문	**학습내용 성취기준**
제시문 전체	· [수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 · [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용 하여 문제를 해결할

	수 있다. · [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 · [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. · [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 · [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. · [수학Ⅱ] - (2) 미분 - ① 미분계수 · [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
하위문항【2-1】	· [수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수 · [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용 하여 문제를 해결할 수 있다. · [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 · [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
하위문항【2-2】	· [수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수 · [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. · [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 · [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
하위문항【2-3】	· [수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수 · [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. · [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 · [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
하위문항【2-4】	· [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 · [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. · [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 · [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. · [수학Ⅱ] - (2) 미분 - ① 미분계수 · [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. · [미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 · [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. · [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

6.4.2 자료 출처

교과서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수학	권오남 외	교학사	2020	65, 66
수학	홍성복 외	지학사	2020	73, 74
수학Ⅰ	고성은 외	좋은책신사고	2020	70, 73
수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2021	75, 78
수학Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2024	11, 31, 55

수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2024	12, 31, 55
미적분	김원경 외	비상교육	2020	76, 80
미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	97, 104

6.5 문항 해설

6.5.1 위원회 자체 평가 의견

- 제시문 **[가]**는 2015년 개정 교육과정 ‘[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수’, 제시문 **[나]~[라]**는 ‘[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한’, ‘[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속’, ‘[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수’에 관련된 내용이다. 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 설명과 용어의 정의가 제시되어 있으며, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있는 제시문들로 구성되어 있다.

- 문항 【2-1】은 주어진 삼각함수의 최대·최소 문제를 간단한 치환을 통하여 이차함수의 최대·최소 문제로 바꿀 수 있는지를 평가하는 문항이다. 또한 가장 쉬운 경우에 대한 문제를 해결하기 위하여 제시문 **[가]**의 내용을 올바르게 활용하는지를 평가한다. 삼각함수의 기본성질, 이차함수의 최대·최소 문제는 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 쉽게 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【2-2】에서도 삼각함수의 최대·최소 문제를 치환을 통하여 이차함수의 최대·최소 문제로 바꿀 수 있는지 평가한다. 문항 【2-1】보다 조금 더 일반적인 상황에서 제시문 **[가]**를 활용하여 구간에서 이차함수의 최솟값을 올바르게 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【2-3】은 구간에서 이차함수의 최솟값을 구하기 위하여 꼭짓점의 x좌표에 따라서 이차함수의 그래프가 어떻게 변하는지 정확하게 이해하고 있는지 평가하는 문항이다. 역시 제시문 **[가]**를 활용하여 꼭짓점의 x좌표에 따른 구간에서 이차함수의 최솟값을 올바르게 구할 수 있는지 평가한다. 구간에서 이차함수의 최솟값을 찾는 방법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

- 문항 【2-4】는 문항 【2-1】~【2-3】의 결과로 주어지는 함수에 대하여 함수의 연속성과 미분가능성의 개념을 정확하게 이해하고 있는지 평가하는 문항이다. 이를 위해서 제시문 **[나]~[라]**의 함수의 극한, 연속성 및 미분가능성의 정의를 적절하게 활용할 수 있는지 평가한다. 또한 함수의 미분가능성을 조사하기 위해서 함수의 몫의 미분법 또는 합성함수의 미분법을 활용할 수 있는지 평가한다. 함수의 극한과 연속성, 미분가능성 및 함수의 몫의 미분법 또는 합성함수의 미분법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

6.5.2 출제 검토 교사 의견

〈수학>과 <수학Ⅱ> 과목을 기반으로 출제되었으며, 이차함수의 최댓값과 최솟값, 함수의 극한과 연속, 미분계수에 대한 종합적 사고력을 평가하는 문제로 구성되었다. 제시문 **[가]**, **[나]**, **[다]**, **[라]**는 모두 고등학교 교과서에서 발췌한 내용으로 수험생들이 문제 해결에 참고할 수 있는 자료이며, 제시된 제시문들은 이차함수의 최댓값과 최솟값, 함수의 극한과 연속의 정의, 미분계수 정의 등 필수 개념을 다루고 있어 고등학교 교육과정을 학습한 학생들이 충분히 이해할 수 있는 난이도로 제시되었다.

문항 【2-1】, 【2-2】, 【2-3】은 삼각함수를 포함하는 식을 치환하여 이차함수로 나타낸 후, 이차함수의 성질을 이용하여 최솟값을 구하는 문제이다. 이 문항들은 이차함수 꼭짓점의 x좌표의 범위를 활용하여 최솟값을 구하는 과정에서 학생들의 계산 능력과 논리적 사고를 필요로 한다.

문항 【2-1】은 특정 범위에서 이차함수의 최솟값을 구하고, 이를 이용해 값을 계산하는 문제로, 고등학교 과정만으로 충분히 해결할 수 있다.

문항 【2-2】와 【2-3】도 비슷한 방식으로 최솟값을 구하는 문제인데 이차함수 꼭짓점의 x좌표의 범위에 따라 경우를 나누어 계산해야 하기 때문에 다소 복잡하게 보일 수 있으나, 기본적인 이차함수의 성질을 잘 이해하고 있으면 쉽게 해결할 수 있을 것으로 예상된다.

문항 【2-4】는 함수의 연속성과 미분가능성을 분석하는 문제로, 좌극한과 우극한, 함숫값을 이용하여 한 점에서의 연속성을 점검하고, 미분계수의 정의를 이용하여 평균변화율의 극한을 구하는 문제이다. 이 문제는 제시문 **[다]**와 **[라]**를 바탕으로 풀 수 있으며, 극한값을 비교하여 미분가능성을 조사하고 이를 통해 함수의 성질을 더 깊이 이해하고, 미분의 기본 개념을 적용하는 능력을 평가하는 문제이다.

전반적으로 문제는 고등학교 교육과정 내에서 다뤄지는 주요 개념들을 종합적으로 평가하는 형태로 출제되었다. 이차함수와 삼각함수, 미분 등 기본적인 수학 개념을 바탕으로 연속성, 미분계수의 정의 등을 구체적으로 다루고 있으며, 고등학교 과정을 충실히 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제로, 기본적인 개념에 대한 이해와 정확한 계산 능력을 필요로 한다.

6.5.3 자문위원 평가 의견

다음은 자문위원들에게 각 제시문과 문항에 대해 ‘고등학교 교육과정 범위에 해당하는가?’라는 질문과 ‘고등학교 교육과정 수준에 적정한가?’라는 질문에 ‘전혀 아니다, 아니다, 보통이다, 그렇다, 매우 그렇다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여하고 제시문과 문항 난이도에 대해 ‘매우 쉽다, 쉽다, 보통이다, 어렵다, 매우 어렵다’를 평가하여 순서대로 1~5점을 부여한 결과를 정리한 내용이다. 수치는 5점 만점이며 평균을 소수점 셋째 자리에서 반올림하여 소수점 둘째 자리까지 표시하였다. 제시문과 문제에 대한 결과는 다음과 같이 나타났다.

제시문 **[가]**는 <수학> 과목의 성취기준인 ‘[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다’에 대한 내용이다. 이차함수의 최댓값과 최솟값 구하는 방법을 다룬 제시문은 교육과정 내에서 중요하게 다루어지는 개념으로 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 5.00으로 매우 높게 나왔다.

제시문 **[나]**는 <수학Ⅱ> 과목의 성취기준인 ‘[12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다’에 대한 내용이다. 함수의 극한, 좌극한, 우극한의 개념을 다루고 있으며, 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 5.00, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 5.00으로 매우 높게 나왔다.

제시문 **[다]**는 <수학Ⅱ> 과목의 성취기준인 ‘[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다’에 대한 내용이다. 이 제시문은 함수의 한 점에서의 연속과 구간에서의 연속 정의를 포함하며, <수학Ⅱ> 과목 및 이후 <미적분> 과목에서도 중요한 개념으로 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.93, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.93으로 매우 높게 나왔다.

제시문 **[라]**는 <수학Ⅱ> 과목의 성취기준인 ‘[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수

있다'에 대한 내용이다. 함수의 미분가능성과 미분계수의 정의를 포함하고 있으며, 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.93, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.93으로 매우 높게 나왔다.

문항 【2-1】은 고등학교 <수학> 과목의 성취기준인 '[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다'와 '[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다'에 근거하여 출제되었다. 이 문제는 주어진 함수에서 삼각함수의 성질을 이용해 이차함수의 최솟값을 구하고 삼각함수의 치환과 이차함수의 최대·최소 개념을 활용하여 해결할 수 있으며, 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.87, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.87로 높게 나왔다.

문항 【2-2】는 <수학> 과목의 성취 기준인 '[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다'와 <수학Ⅰ> 과목의 성취기준인 '[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다''에 근거하여 출제되었다. 주어진 문제는 삼각함수와 이차함수를 결합하여, 제한된 범위 내에서 이차함수의 최솟값을 구하고 삼각함수의 성질과 이차함수의 최대·최소 개념을 활용해 해결할 수 있으며, 미분법을 사용하여 함수의 최솟값을 찾을 수 있다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.87, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.87로 높게 나왔다.

문항 【2-3】은 <수학> 과목의 성취기준인 '[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다'와 <수학Ⅰ> 과목의 성취기준인 '[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다'에 해당하는 문제이다. 삼각함수와 이차함수를 결합하여, 주어진 범위 내에서 이차함수의 최솟값을 구하는 문제로, 이차함수의 최대·최소와 삼각함수의 성질을 활용해 해결 가능하다. 함수의 범위를 파악하고, 변수에 따른 최솟값을 찾는 과정이 필요하며 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.87, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.87로 높게 나왔다.

문항 【2-4】는 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속, [12수학Ⅱ02-01] 미분계수, [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하고 이를 활용하는 문제이다. 함수의 연속성과 미분가능성을 조사하는 과정으로, 주어진 함수에서 좌극한과 우극한을 비교하고, 미분계수의 정의를 사용하여 미분가능성을 판별하여 문제를 해결할 수 있다. 교육과정 범위에 해당한다는 의견이 평균 4.87, 교육과정 수준에 적정하다는 의견이 평균 4.87로 높게 나왔다.

따라서 모든 제시문과 문항은 고등학교 교육과정 안에서 충분히 이해하고 해결할 수 있는 적절한 문항이라 판단할 수 있다. 또한, 제시문의 난이도는 평균 1.53으로 고교 교육과정에 근거하여 제공된 기초적인 개념들을 중심으로 출제되었다고 판단된다. 문제의 난이도는 평균 3.30으로 판단되었다. 문항 【2-1】은 삼각함수를 이용해 간단히 해결할 수 있는 문제로, 난이도 매우 평이하다고 판단하였다. 문항 【2-2】와【2-3】은 이차함수의 성질을 이용하여 최솟값을 구하는 문제로, 학생들이 삼각함수와 이차함수를 함께 활용해야 하는 보통 수준의 난이도의 문제로 판단된다. 문항 【2-4】는 연속성과 미분가능성을 판단하는 문제로, 교과서에 제시된 정의를 기반으로 학생들이 문제를 해결할 수 있다. 전체적으로 문제는 교과서에서 다룬 내용으로, 접근이 쉬운 부분도 있지만 범위와 계수에 대한 정확한 분석이 요구되며, 변별력이 있는 문제로 난이도가 중간에서 어려운 수준으로 예상된다.

6.6 채점 기준

고등학교 필수 교육과정에 포함된 삼각함수와 이차함수의 최대·최소 문제, 그리고 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 기본 개념을 이해하고 있는지를 평가한다. 특히, 삼각함수의 최대·최소 문제를 간단한 치환을 통해 이차함수의 구간 내 최대·최소 문제로 변환하고, 가장 쉬운 경우에서 점차 난이도가 높은

경우로 확장하며 문제를 해결하는 사고력을 평가한다. 마지막 문항에서는, 이차함수의 최대·최소 문제를 해결한 결과를 바탕으로 함수의 연속성과 미분가능성에 대해 고등학교 교육과정의 기본 개념을 정확히 이해하고 있는지를 확인한다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

- 문항 【2-1】은 주어진 삼각함수의 최대·최소 문제를 간단한 치환을 통하여 이차함수의 최대·최소 문제로 바꿀 수 있는지를 평가하는 문항이다. 또한 가장 쉬운 경우에 대한 문제를 해결하기 위하여 제시문 **[가]**의 내용을 올바르게 활용하는지를 평가한다.

- 문항 【2-2】에서도 삼각함수의 최대·최소 문제를 치환을 통하여 이차함수의 최대·최소 문제로 바꿀 수 있는지 평가한다. 문항 【2-1】보다는 조금 더 일반적인 상황에서도 제시문 **[가]**를 활용하여 구간에서의 이차함수의 최솟값을 올바르게 구할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【2-3】은 구간에서의 이차함수의 최솟값을 구하기 위하여 꼭짓점의 x좌표에 따라 이차함수의 그래프가 어떻게 변하는지 정확하게 이해하고 있는지 평가하는 문항이다. 역시 제시문 **[가]**를 활용하여 꼭짓점의 x좌표에 따른 구간에서의 이차함수의 최솟값을 올바르게 구할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【2-4】는 문항 【2-1】~【2-3】의 결과로 주어지는 함수에 대하여 함수의 연속성과 미분가능성의 개념을 정확하게 이해하고 있는지 평가하는 문항이다. 이를 위해서 제시문 **[나]**~**[라]**의 함수의 극한, 연속성 및 미분가능성의 정의를 적절하게 활용할 수 있는지 평가한다.

6.7 답안 사례

$x = \cos\theta\,(0 \le \theta < 2\pi)$, $h(x) = \{g(\theta)\}^2$이라 하면, $-1 \le x \le 1$이고

$$h(x) = (4x-3t)^2 + 4t^2(1-x^2) = 4(4-t^2)x^2 - 24tx + 13t^2$$

이므로 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값의 양의 제곱근이 $f(t)$가 된다. 제시문 **[가]**를 이용하여, 아래 【2-1】, 【2-2】, 【2-3】의 예시답안에서 $t=1$, $0<t<1$, $t>1$인 경우에 대하여 $f(t)$를 각각 구한다.

【2-1】 $t=1$이라고 하면,

$$h(x) = 12x^2 - 24x + 13 = 12(x-1)^2 + 1$$

이므로 함수 $h(x)$는 꼭짓점의 x좌표가 1이고 최고차항의 계수가 양인 이차함수이다. 따라서 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $h(x)$는 최솟값 $h(1) = 1$을 가진다. 그러므로

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

【2-2】 $0 < t < 1$이라고 하자. 그러면 $4 - t^2 > 0$이고

$$h(x) = 4(4-t^2)\left(x - \frac{3t}{4-t^2}\right)^2 + \frac{t^2(16-13t^2)}{4-t^2}$$

이므로 함수 $h(x)$는 꼭짓점의 x좌표가 $\dfrac{3t}{4-t^2}$이고 최고차항의 계수가 양인 이차함수이다.

또한 $t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4) < 0$이므로 $0 < \dfrac{3t}{4-t^2} < 1$이다. 따라서 구간 $[-1, 1]$에서 함수

$h(x)$의 최솟값은

$$h\left(\frac{3t}{4-t^2}\right)=\frac{t^2(16-13t^2)}{4-t^2}$$

따라서

$$f(t)=\frac{t\sqrt{16-13t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$$

【2-3】 $t>1$이라고 하자. 이때 $t^2+3t-4=(t-1)(t+4)>0$이다.

(i) $t=2$인 경우: $h(x)=-48x+52$이므로 함수 $h(x)$는 기울기가 -48인 일차함수이다. 따라서 구간 $[-1,1]$에서의 함수 $h(x)$는 최솟값 $h(1)=4$를 가진다. 따라서

$$f(2)=\sqrt{4}=2$$

(ii) $1<t<2$ 인 경우:

$$h(x)=4(4-t^2)\left(x-\frac{3t}{4-t^2}\right)^2+\frac{t^2(16-13t^2)}{4-t^2}$$

이므로 함수 $h(x)$는 꼭짓점의 x좌표가 $\frac{3t}{4-t^2}$이고 최고차항의 계수가 양인 이차함수이다. $\frac{3t}{4-t^2}>1$이므로 구간 $[-1,1]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=(4-3t)^2$이다. 따라서

$$f(t)=\sqrt{(4-3t)^2}=|4-3t|$$

(iii) $t>2$인 경우: 함수 $h(x)$는 꼭짓점의 x좌표가 $\frac{3t}{4-t^2}$이고 최고차항의 계수가 음인 이차함수이다. $\frac{3t}{4-t^2}<0$이므로 구간 $[-1,1]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=(4-3t)^2$이다. 그러므로

$$f(t)=\sqrt{(4-3t)^2}=|4-3t|$$

(i), (ii), (iii)을 종합하면,

$$t>1\text{일 때, } f(t)=|4-3t|$$

【2-4】 문항 【2-1】~【2-3】의 예시답안으로부터

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t\sqrt{16-13t^2}}{\sqrt{4-t^2}} & (0<t<1)\\ 4-3t & \left(1\le t<\dfrac{4}{3}\right)\end{cases}$$

(i) $t=1$에서의 연속성을 조사하면,

$$\lim_{t\to 1-}f(t)=\lim_{t\to 1-}\frac{t\sqrt{16-13t^2}}{\sqrt{4-t^2}}=1,\quad \lim_{t\to 1+}f(t)=\lim_{t\to 1+}(4-3t)=1,\quad f(1)=1$$

이므로 제시문 **[나]**와 **[다]**에 의해, 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 연속이다.

(ii) 함수 $f(t)$의 $t=1$에서의 미분가능성을 조사한다. 우선

$$\lim_{t\to 1+}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{(4-3t)-1}{t-1}=-3$$

또한, $0<t<1$일 때

$$\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\frac{1}{t-1}\left(\frac{t\sqrt{16-13t^2}}{\sqrt{4-t^2}}-1\right)=\frac{t\sqrt{16-13t^2}-\sqrt{4-t^2}}{(t-1)\sqrt{4-t^2}}$$

$$= \frac{t^2(16-13t^2)-(4-t^2)}{(t-1)\sqrt{4-t^2}\left(t\sqrt{16-13t^2}+\sqrt{4-t^2}\right)}$$

$$= \frac{(4-13t^2)(t+1)}{\sqrt{4-t^2}\left(t\sqrt{16-13t^2}+\sqrt{4-t^2}\right)}$$

이므로

$$\lim_{t\to 1-}\frac{f(t)-f(1)}{t-1} = \lim_{t\to 1-}\frac{(4-13t^2)(t+1)}{\sqrt{4-t^2}\left(t\sqrt{16-13t^2}+\sqrt{4-t^2}\right)} = -3$$

따라서 제시문 **[나]**와 **[라]**에 의하여, 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 미분가능하다.