2023학년도 모의논술

# 논술문제 해설지
# 자연계

[ 교사용 ]

성균관대학교
SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

# 논술문제 해설지 (자연계)

[ 문제 1 ]

■ 개요 및 주요 평가항목

이차방정식의 근과 계수의 관계를 통해 귀납적으로 특정 수열을 정의한 뒤, 이 수열로부터 파생되는 다양한 주제의 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중, 수학적 귀납법, 경우의 수, 이차방정식의 근과 계수의 관계 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제로, 합의 기호에 대한 내용을 포함한다.

[문제 1 – i ]

근과 계수의 관계를 올바르게 이해하고 있다.

[문제 1 – ii ]

수학적 귀납법을 올바르게 사용할 수 있다.

[문제 1 – iii ]

수열의 항을 귀납적으로 구한 뒤, 경우의 수를 구할 수 있다.

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 1 – i ]

○ 예시답안

먼저,
$$\begin{aligned} -af_{n+1}+bf_n &= (\alpha+\beta)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+1-k}\beta^k\right)-(\alpha\beta)\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}\beta^k\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+2-k}\beta^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+1-k}\beta^{k+1}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n+1-k}\beta^{k+1}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+2-k}\beta^k\right)+\beta^{n+2} \\ &= f_{n+2} \end{aligned}$$
가 성립한다.

○ 채점기준

(2점) 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=-a$와 $\alpha\beta=-b$를 구할 수 있다.

(8점) $f_{n+2}=-af_{n+1}+bf_n$ 을 보일 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[문제1 – ii]

○ 예시답안

자연수 $n$에 대하여 명제 $p(n)$을 "$f_n$과 $f_{n+1}$이 정수이다"로 설정하자. $f_1=\alpha+\beta=-a$이고,

$f_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=a^2+b$이므로 두 수 모두 정수이다.

따라서, 명제 $p(n)$은 $n=1$일 때 참이다.

명제 $p(n)$이 $n=k$일 때 참이라고 가정하면, $f_k$와 $f_{k+1}$이 정수이다.

이때, $f_{k+2}=-af_{k+1}+bf_k$이므로, $f_{k+2}$도 정수이다.

즉, $f_{k+1}$과 $f_{k+2}$가 정수이므로 명제 $p(n)$이 $n=k+1$일 때 참이다.

따라서, 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수이다.

○ 채점기준

(5점) 명제 $p(n)$을 올바르게 설정할 수 있다.

(5점) 수학적 귀납법을 사용하여 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수임을 보일 수 있다.

[문제1 –iii]

○ 예시답안

동전을 5번 던져 나올 수 있는 $(a,b)$는 아래의 여섯가지이다.

$$(0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0)$$

각각에 대해서 [문제1–i]의 결과를 적용시키면 아래와 같은 표를 얻을 수 있다.

| $(a,b)$ | $f_{n+2}$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(0,5)$ | $5f_n$ | $0$ | $5$ | $0$ | $25$ | $0$ |
| $(1,4)$ | $-f_{n+1}+4f_n$ | $-1$ | $5$ | $-9$ | $29$ | $-65$ |
| $(2,3)$ | $-2f_{n+1}+3f_n$ | $-2$ | $7$ | $-20$ | $61$ | $-182$ |
| $(3,2)$ | $-3f_{n+1}+2f_n$ | $-3$ | $11$ | $-39$ | $139$ | $-495$ |
| $(4,1)$ | $-4f_{n+1}+f_n$ | $-4$ | $17$ | $-72$ | $305$ | $-1292$ |
| $(5,0)$ | $-5f_{n+1}$ | $-5$ | $25$ | $-125$ | $625$ | $-3125$ |

위의 표에서와 같이 절댓값 $|f_5|$의 값이 1000보다 큰 경우는 $(a,b)$가 $(4,1)$ 또는 $(5,0)$ 인 경우이다. 즉, 동전을 5번 던져 앞면이 4번 이상 나오는 경우이다.

동전의 앞면이 4번 나오는 경우는 5가지이고,

앞면이 5번 나오는 경우는 1가지이므로, 모두 6가지이다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

○ 채점기준

(7점) 가능한 $f_5$의 값을 모두 구할 수 있다.

(3점) 경우의 수를 올바르게 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[ 문제 2 ]

■ 개요 및 주요 평가항목

특정한 정수의 곱과 합으로 정의되는 집합의 원소들을 등차수열의 항으로 이해한 다음, 다양한 종류의 합과 이와 관련한 현상들을 탐구하는 능력을 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중, 집합과 명제, 등차수열과 여러 가지 수열의 합 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제로, 자연수에 대한 기본적인 이해와 등차수열의 합에 대한 내용을 포함한다.

[문제2 − i ]

등차수열의 일반항을 올바르게 유도할 수 있다.

[문제2 − ii ]

거듭제곱의 합을 구할 수 있다.

[문제2 − iii ]

등차수열의 합을 올바르게 구할 수 있다.

■ 예시답안 및 채점기준

[문제2 − i ]

○ **예시답안**

$3x+2=15a-25b=5(3a-5b)$이므로, $3x+2$는 5의 배수이다.

따라서, $x=5k+1$의 꼴이다. 이를 다시 대입하면, $3k+1=3a-5b$를 얻게 된다.

여기서, $x$는 음이 아닌 정수이므로, $k$도 음이 아닌 정수이다.

$(a,b)=(2,1)$을 대입하면, $3a-5b=1$을 얻게 되므로, $3k+1$꼴의 음이 아닌 정수는 항상 $3a-5b$의 형태로 쓰여지게 된다.

이로부터 집합 $S$는 $5k+1$꼴의 음이 아닌 정수들의 집합이고, $a_n=5n-4$임을 알 수 있다.

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 5인 등차수열이다.

따라서, $a_{100}=496$이다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

○ 채점기준

(8점) 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있다.

(2점) 수열의 100번째 항을 구할 수 있다.

[문제2 - ii]

○ 예시답안

제시문을 이용하여
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{m}(5n-4)^2 \\ &= 25\left(\sum_{n=1}^{m} n^2\right) - 40\left(\sum_{n=1}^{m} n\right) + 16\left(\sum_{n=1}^{m} 1\right) \\ &= \frac{25m(m+1)(2m+1)}{6} - 20m(m+1) + 16m \\ &= \frac{m(50m^2-45m+1)}{6}\end{aligned}$$

을 얻게 된다. 소문항의 식은 $\sum_{n=1}^{20} a_n^2 - \sum_{n=1}^{10} a_n^2$이므로, $m=10, 20$일 때 계산한 다음, 빼주면 된다. 즉, $\frac{20(50\times 20^2-45\times 20+1)}{6} - \frac{10(50\times 10^2-45\times 10+1)}{6} = 56085$이다.

○ 채점기준

(3점) $\sum_{n=1}^{20} a_n^2 - \sum_{n=1}^{10} a_n^2$을 고려할 수 있다.

(7점) 거듭제곱의 합을 올바르게 구할 수 있다.

[문제2 - iii]

○ 예시답안

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 $p=5-c$인 등차수열이다. 따라서,
$$T_n = \frac{n\{2+(n-1)p\}}{2}$$

이다. 비 $\frac{T_{2n}}{T_n} = k$가 일정하다면,
$$\frac{2n\{2+(2n-1)p\}}{2} = \frac{kn\{2+(n-1)p\}}{2}$$

가 성립한다. 양변을 $n$으로 나눈 다음 정리하면,
$$(4-k)pn = (k-2)(2-p)$$

을 얻게 된다. 따라서 $(4-k)p=0$이므로, $k=4$ 또는 $p=0$이고 이로부터 $k=4$일 때, $p=2$이고 $p=0$일 때, $k=2$이다. 따라서 이로부터 $c=5$ 또는 3이다.

○ 채점기준

(3점) $T_n$을 식으로 표현할 수 있다.

(9점) 식 $(4-k)pn=(k-2)(2-p)$을 유도할 수 있다.

(3점) $c$의 값을 모두 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[ 문제 3 ]

■ 개요 및 주요 평가항목

절댓값이 포함된 합성함수의 극대, 극소와 정적분 계산을, 적절한 대칭성을 활용하여 구할 수 있는 능력을 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중, 도형의 이동, 함수의 극대와 극소, 다항함수의 정적분을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제로, 절댓값과 합성함수에 대한 기본적인 내용을 포함한다.

[문제3 – i ]

절댓값의 성질을 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

[문제3 – ii ]

함수의 극솟값과 극댓값을 가지는 점의 좌표를 구할 수 있다.

[문제3 – iii ]

정적분의 값을 올바르게 구할 수 있다.

■ 예시답안 및 채점기준

[문제3 – i ]

○ 예시답안

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x-|-x+2|+|-x+1|-|-x-1|+|-x-2| \\ &= -x-|x-2|+|x-1|-|x+1|+|x+2| \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

이므로, $y=f(x)$는 원점에 대해 대칭이다.

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이다.

닫힌구간 $[1,2]$에서 $f(x)=-x+2$이다.

구간 $[2,\infty)$에서 $f(x)=x-2$이다.

따라서, $x=a$에서 극댓값을 가지기 위한 $a$의 값은 $-2,1$이다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

○ 채점기준

(7점) $y=f(x)$의 식을 구할 수 있다.

(3점) 극댓값을 가지는 $x=a$의 값을 구할 수 있다.

[문제3 - ii]

○ 예시답안

$g(-x)=|-x|^3-(-x)^2=|x|^3-x^2=g(x)$이므로, 함수 $y=g(x)$는 $y$축에 대해 대칭이다. 따라서, $h(-x)=g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))=h(x)$이므로 함수 $y=h(x)$도 $y$축에 대해 대칭이다. 이제 $x\geq 0$일 때, 함수 $y=h(x)$를 살펴보자.

닫힌구간 $[0,1]$에서 $h(x)=g(x)=x^3-x^2$이다.

닫힌구간 $[1,2]$에서 $h(x)=g(-x+2)=(x-2)^2(1-x)$이므로, 닫힌구간 $[0,1]$에서의 함수 $h(x)=g(x)=x^3-x^2$를 직선 $x=1$에 대해 대칭이동시킨 것이다.

구간 $[2,\infty)$에서 $h(x)=g(x-2)$이므로, 구간 $[0,\infty)$에서의 함수 $g(x)=x^3-x^2$를 $x$축 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다. 따라서, $x=0,1,2$에서 극댓값을 가진다.

$g'(x)=3x^2-2x=0$으로부터 $x=\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}$에서 극솟값을 가진다.

대칭성에 의해, $x=-2,-1$에서도 극댓값을 가지고, $x=-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{8}{3}$에서도 극솟값을 가진다.

따라서, 극댓값을 가지는 $x=a$의 절댓값의 합은 $0+2(1+2)=6$이고, 극솟값을 가지는 $x=b$의 절댓값의 합은 $2\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{28}{3}$이다.

○ 채점기준

(5점) 함수 $h(x)$를 구할 수 있다.

(5점) 함수 $h(x)$의 극댓값을 가지는 점 $x=a$를 모두 구할 수 있다.

(5점) 함수 $h(x)$의 극솟값을 가지는 점 $x=b$를 모두 구할 수 있다.

# 논술문제 해설지 (자연계)

[문제3 −iii]

○ 예시답안

함수 $h(x)$는 $y$축에 대해 대칭이므로 $\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} h(x)dx$이다. 닫힌구간 $[0,2]$에서 함수 $h(x)$는 직선 $x=1$에 대해서 대칭이므로 $\int_{0}^{2} h(x)dx = 2\int_{0}^{1} h(x)dx$이다.

따라서, $\int_{-2}^{2} h(x)dx = 4\int_{0}^{1} h(x)dx = 4\int_{0}^{1}(x^3 - x^2)dx = -\frac{1}{3}$이다.

○ 채점기준

(8점) $\int_{-2}^{2} h(x)dx = 4\int_{0}^{1} h(x)dx = 4\int_{0}^{1}(x^3 - x^2)dx$을 유도할 수 있다.

(2점) 적분값을 구할 수 있다.