2023학년도 모의논술

논술시험(자연계)

□ 답안작성 유의사항

가. 시험 시간은 100분이며, 문제별 답안은 반드시 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 작성해야 합니다.(문제번호와 답안번호는 반드시 일치해야 합니다.)

나. 문제별로 해당되는 답안 작성영역에 다른 문제의 답안을 작성한 경우 평가하지 않습니다.

다. 답안은 지정된 작성영역 내에 작성해야 하며, 지정된 작성영역을 초과하여 작성한 부분에 대해서는 평가하지 않습니다.

라. 답안 작성영역에는 어떠한 경우에도 인적사항을 기재하면 안됩니다. 인적사항(성명, 서명 등) 또는 답안과 관계없는 표기를 하는 경우 결격처리 될 수 있습니다.

마. 흑색 필기구를 사용해야 합니다.(연필·샤프 사용가능, 답안작성 중 필기구 종류 또는 색상 변경 불가)

바. 답안 수정 시에는 취소선을 긋거나 지우개로 지워야 하며 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.

사. 답안지 전면 상단에 본인의 인적사항(모집단위, 수험번호, 성명 등)을 기재하고, 감독위원의 확인을 받아야 합니다.

성균관대학교
SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY

논술시험 (자연계)

[문제 1] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제 1-ⅰ] ~ [문제 1-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(a) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(b) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

<제시문 2>

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n이라고 하면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

<제시문 3>

두 정수 a와 b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근을 α와 β라고 할 때(단, $\alpha \le \beta$), 모든 자연수 n에 대하여

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}\beta^k = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$

을 정의하자.

[문제 1-ⅰ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$에 대하여,

$$f_{n+2} = -af_{n+1} + bf_n$$

이 모든 자연수 n에 대해 성립함을 보이시오. (10점)

[문제 1-ⅱ] <제시문 1>의 수학적 귀납법을 이용하여 <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수라는 사실을 보이시오. (10점)

[문제 1-ⅲ] 동전을 5번 던져 앞면이 a번 나오고 뒷면이 b번 나왔다고 할 때, 절댓값 $|f_5|$의 값이 1000보다 클 경우의 수를 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

논술시험 (자연계)

[문제 2] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제 2-ⅰ] ~ [문제 2-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>
자연수의 거듭제곱의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

<제시문 2>
첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 제n항을 l이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.

<제시문 3>
음이 아닌 정수 x가, 음이 아닌 정수 a와 b에 대해 $3x = 15a - 25b - 2$를 만족할 때, 이러한 모든 x의 집합을 S라고 하자. 그리고, 집합 S의 원소를 작은 수부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$로 나타내자.

[문제 2-ⅰ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, a_{100}의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2-ⅱ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $\sum_{n=11}^{20} a_n^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{20}^2$의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2-ⅲ] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$과 상수 c에 대하여, 일반항이 $b_n = a_n - c(n-1)$인 수열 $\{b_n\}$을 정의하고, 이 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 T_n이라고 하자. 비 $T_n : T_{2n}$이 n의 값에 관계없이 일정하기 위한 c의 값을 모두 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

논술시험 (자연계)

[문제 3] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [문제 3-ⅰ] ~ [문제 3-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>
실수 x의 절댓값 $|x|$는 수직선 위에서 실수 x를 나타내는 점과 원점 사이의 거리를 나타낸다. 예를 들어, $|x|=5$이면 $x=5$ 또는 $x=-5$이다.

<제시문 2>
함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, $f(a)$를 극댓값이라고 한다. 또, $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하며, $f(a)$를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

<제시문 3>
<제시문 1>을 이용하여 실수 전체에서 정의되는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{cases} f(x)=x-|x+2|+|x+1|-|x-1|+|x-2| \\ g(x)=|x|^3-x^2 \end{cases}$$

그리고, 이 두 함수의 합성함수를 $h(x)=(g \circ f)(x)=g(f(x))$라고 하자.

[문제 3-ⅰ] <제시문 3>에서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대일 때, 가능한 a의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

논술시험 (자연계)

[문제 3-ii] <제시문 3>에서 정의된 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극대이기 위한 a의 절댓값의 합과 $x=b$에서 극소이기 위한 b의 절댓값의 합을 각각 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

[문제 3-iii] <제시문 3>에서 정의된 함수 $h(x)$에 대하여 정적분 $\int_{-2}^{2} h(x)\,dx$의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)