2025학년도 모의논술

논술문제 해설지
(수리 논술)

1398

성균관대학교

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 1]

■ 개요 및 주요 평가항목

서로 다른 n개의 숫자에서 2개를 선택하여 만들어 낼 수 있는 ${}_n\mathrm{C}_2$개의 숫자들이 언제 등차수열의 항을 이루는지를 확인하는 문제로, 등차수열의 기본적인 개념과 간단한 경우에서의 조합의 의미를 이해하고 있는지 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중 경우의 수(조합)과 등차수열 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제이다.

[문제 1 − i]

등차수열의 뜻을 알고, 그 성질을 활용할 수 있는지 평가한다.

[문제 1 − ii]

등차수열의 뜻을 알고, 그 성질을 활용할 수 있는지 평가한다.

[문제 1 − iii]

등차수열의 뜻을 알고, 그 성질을 활용할 수 있는지 평가한다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 1 − i]

○ 예시답안

집합 $S=\{a=a_1, a_2, a_3\}$로부터 얻은 등차수열은

$$a_1+a_2<a_1+a_3<a_2+a_3$$

이고, 공차를 d라고 하면, $d=a_2-a_1=a_3-a_2$가 된다. 따라서, 등차수열은

$$2a+d, 2a+2d, 2a+3d$$

가 되고, 이 세수의 합은 $6(a+d)=600$이 되어 $a+d=100$을 얻게 된다. $a, d\geq 1$이므로 만족하는 순서쌍 $(a,d)=(1,99), (2,98), \cdots, (99,1)$이고 가능한 모든 집합 S의 개수는 99이다.

○ 채점기준

(5점) 집합 S의 원소들이 만족해야되는 조건을 수식화 할 수 있다.

(5점) 가능한 집합 S의 개수를 올바르게 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 1 − ii]

○ 예시답안

집합 $S=\{a=a_1, a_2, a_3, a_4\}$로부터 얻은 등차수열의 처음 세 개의 항은

$$a_1+a_2 < a_1+a_3 < a_1+a_4 \text{ 혹은 } a_1+a_2 < a_1+a_3 < a_2+a_3$$

이다. 먼저, $a_1+a_2 < a_1+a_3 < a_1+a_4$라고 가정하자. 이때, 등차수열은

$$a_1+a_2 < a_1+a_3 < a_1+a_4 < a_2+a_3 < a_2+a_4 < a_3+a_4$$

가 되고, 공차를 d라고 하면 $d=a_3-a_2=a_4-a_3$이 된다. 이로부터,

$$d=(a_2+a_3)-(a_1+a_4)=a_2-a_1-d$$

을 얻게 되어, $a_2-a_1=2d$이다. 따라서, $S=\{a, a+2d, a+3d, a+4d\}$가 되고, 집합 S의 원소들로 만들어진 등차수열은 첫째항이 $2a+2d$이고 공차가 d인 등차수열이므로 $\frac{6(4a+9d)}{2}=2025$, 즉 $4a+9d=675$이고 이를 만족하는 양의 정수의 쌍 (a,d)는 $(162,3), (153,7),\cdots (9,71)$으로 총 18개다.

이제, $a_1+a_2 < a_1+a_3 < a_2+a_3$라고 가정하자. 이때, 등차수열은

$$a_1+a_2 < a_1+a_3 < a_2+a_3 < a_1+a_4 < a_2+a_4 < a_3+a_4$$

이 되고, 위와 같은 방법으로(혹은 대칭성에 의해) $S=\{a, a+d, a+2d, a+4d\}$이고 집합 S의 원소들로 만들어진 등차수열은 첫째항이 $2a+d$이고 공차가 d인 등차수열이므로 $\frac{6(4a+7d)}{2}=2025$, 즉 $4a+7d=675$가 된다. 이를 만족하는 양의 정수의 쌍 (a,d)는 $(167,1), (160,5), \cdots, (6,93)$으로 총 24개다. 따라서, 가능한 집합 S의 개수는 42개다.

○ 채점기준

(2점) 가능한 집합 S를 두 가지로 나눌 수 있다.

(4점) 첫 번째 경우의 개수를 구할 수 있다.

(4점) 두 번째 경우의 개수를 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 1 −iii]

○ 예시답안

집합 $S=\{a_1,\cdots,a_n\}$로부터 얻은 등차수열은 다음과 같다.

$$a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_{n-2}+a_n<a_{n-1}+a_n$$

공차를 d라 하면, $d=a_3-a_2=a_{n-1}-a_{n-2}$를 얻을 수 있다. 이로부터

$$a_2+a_{n-1}=(a_3-d)+(a_{n-2}+d)=a_3+a_{n-2}$$

가 되어, 만약 $n\geq 6$이라면 <제시문 3>의 조건에 모순이다.

이제 $n=5$이라고 가정하면, $a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_3+a_5<a_4+a_5$를 얻는다.

이로부터, $d=a_3-a_2=a_4-a_3$을 얻게 되고, $(a_1+a_3)+d=a_1+(a_3+d)=a_1+a_4$가 되어, a_1+a_4가 3번째 항이 된다. 마찬가지로 a_2+a_5는 8번째 항이 된다.

또한, $a_2+a_3<a_2+a_4<a_3+a_4$도 각 항의 차이가 d이므로 a_1+a_5는 4번째 항이거나 7번째 항이 된다. 먼저, a_1+a_5가 4번째 항이라고 가정하자. 그러면 등차수열은

$$\begin{aligned} a_1+a_2<a_1+a_3<a_1+a_4<a_1+a_5 \\ <a_2+a_3<a_2+a_4<a_3+a_4 \\ <a_2+a_5<a_3+a_5<a_4+a_5 \end{aligned}$$

이 된다. 이때, $a_5-a_4=(a_1+a_5)-(a_1+a_4)=d=(a_1+a_3)-(a_1+a_2)=a_3-a_2$이다. 이로부터 $a_2+a_5=a_3+a_4$가 되어, <제시문 3>의 조건에 모순이다.

마찬가지로 a_1+a_5가 7번째 항인 경우에도 비슷한 방식으로 모순을 이끌어낼 수 있다.

○ 채점기준

(4점) $n\geq 6$인 경우 존재하지 않음을 보인다.

(6점) $n=5$인 경우 존재하지 않음을 보인다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 2]

■ 개요 및 주요 평가항목

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계로부터 파생되는 다양한 점의 좌표와 직선의 방정식을 구할 수 있는지와 이차방정식의 근과 계수의 관계를 올바르게 이해하고 있는지, 그리고 정적분을 올바르게 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중에서 방정식과 부등식, 직선의 방정식, 정적분 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제이다.

[문제 2 − i]

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 올바르게 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 2 − ii]

이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계를 올바르게 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 2 − iii]

직선의 방정식을 올바르게 구할 수 있고, 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 2 − i]

○ 예시답안

이차방정식 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$이 두 개의 서로 다른 실근을 가져야 하므로,

$$D=k^2+2(1-k^2)>0$$

이 성립한다. 따라서, $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ 이고 $k\neq\pm1$이다.

$x_1+x_2=\dfrac{2k}{1-k^2}$이므로, 두 점 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$의 중점의 x좌표는 $\dfrac{k}{1-k^2}$이다.

문제의 직선이 y축과 만나지 않기 위해서는 $\dfrac{k}{1-k^2}=2$, 즉 $2k^2+k-2=0$이 성립해야 하고

$k=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$이다. 이 두 개의 k의 값 모두 위에서 구한 부등식을 만족한다.

○ 채점기준

(5점) 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 k에 대한 조건으로 표현할 수 있다.

(5점) 가능한 k의 값을 모두 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 2 − ii]

○ 예시답안

이차방정식 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$이 두 개의 서로 다른 양의 실근을 가져야 하므로,

$$x_1+x_2=\frac{2k}{1-k^2}>0,\ x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0,\ D=k^2+2(1-k^2)>0$$

이 성립한다. 따라서, $-\sqrt{2}<k<-1$이다.

이때, 두 점 P_1, P_2의 중점의 좌표는 $\left(\frac{k}{1-k^2}, \frac{1}{1-k^2}\right)$이므로, $\dfrac{\frac{1}{1-k^2}}{\frac{k}{1-k^2}-2}=\dfrac{c}{-2}$를 얻게 되어

$$c=\frac{2}{-2k^2-k+2}$$

가 성립한다. $-\sqrt{2}<k<-1$에 대해 $-2+\sqrt{2}<-2k^2-k+2<1$이므로, $c<-2-\sqrt{2}$ 혹은 $c>2$이다. 따라서, 문제의 선분은 점$(0,-2-\sqrt{2})$와 점$(0,2)$를 연결하므로, 그 길이는 $4+\sqrt{2}$이다.

○ 채점기준

(5점) 가능한 k값의 범위를 구할 수 있다.

(5점) 선분의 길이를 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 2 −iii]

○ 예시답안

[문제 2 −ii]와 대칭성으로부터 $k=\sqrt{2}$ 이다. 즉, 문제에서 주어진 직선의 방정식은

$y=\sqrt{2}x+1$, 이차함수는 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 이고, 점 P_1의 좌표는 $P_1(-\sqrt{2},-1)$이다.

따라서, 직선 P_1T의 방정식은 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-2$이고 $T(2\sqrt{2},-4)$이다.

이로부터 직선 TB의 방정식은 $y=-2\sqrt{2}x+4$가 되어 $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},2\right)$이다.

이로부터 직각삼각형 P_1TB에서 $\overline{P_1T}=3\sqrt{3}$, $\overline{P_1B}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$ 이므로, 그 넓이는 $\frac{27}{4}\sqrt{2}$ 이다.

이제 두 영역 중에서 아래에 놓인 부분의 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}x+2\right)dx=\frac{9}{2}\sqrt{2}$$

이므로 나머지 영역의 넓이는 $\frac{9}{4}\sqrt{2}$ 이고, 두 영역의 넓이의 비는 $2:1$이다.

○ 채점기준

(3점) 점 P_1, T, B의 좌표를 구할 수 있다.

(2점) 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

(5점) 정적분을 이용하여 각 영역의 넓이를 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 3]

■ 개요 및 주요 평가항목

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 주어진 삼각형의 세 선분과 원과의 교점의 개수를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교과정 중 두 점 사이의 거리 공식, 이차함수의 최대, 최소, 다항식의 인수분해, 이차부등식, 삼차함수의 그래프의 개형 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제이다.

[문제 3 – i]

이차함수의 닫힌 구간에서의 최대, 최소를 활용하여 관련된 부등식을 제대로 풀 수 있는지 평가한다.

[문제 3 – ii]

삼차함수의 그래프의 개형을 이해하고, 이와 관련한 부등식을 제대로 풀 수 있는지 평가한다.

[문제 3 – iii]

사차다항식의 인수분해를 통하여 주어진 부등식을 제대로 풀 수 있는지 평가한다.

[문제 3 – iv]

이차함수와 관련된 절대부등식의 개념을 이용해, 주어진 부등식을 제대로 풀 수 있는지 평가한다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 3 - i]

○ 예시답안

선분 AB 위의 임의의 점을 $(x,0)$으로 놓자. 여기서 $0 \le x \le 2$이다. 원 C_a와 선분 AB의 교점이 생길 필요충분조건은 두 점 $(x,0)$과 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이 되는 x가 0과 2 사이에 존재한다는 것이다. 두 점 $(x,0)$과 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리의 제곱을 $f(x)$로 두면, $f(x) = (x-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$이므로 $f(x) = \frac{4}{3}$이 되는 x를 닫힌 구간 $[0,2]$에서 찾도록 하자. 다음 두 가지 경우로 나누어서 생각해보도록 하겠다.

(경우1) $1 \le a \le 2$: 이 경우 닫힌 구간 $[0,2]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(a) = \frac{1}{3}a^4$이고 최댓값은 $f(0) = a^2 + \frac{1}{3}a^4$이므로, $f_1(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $\frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3} \le a^2 + \frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $\frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3}$를 풀면, $a^4 - 4 = (a^2+2)(a^2-2) \le 0$이므로 $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$를 얻는다. 또한 $\frac{4}{3} \le a^2 + \frac{1}{3}a^4$를 풀면, $a^4 + 3a^2 - 4 \ge 0$이므로 $(a^2-1)(a^2+4) \ge 0$이 되어 $a \ge 1$ 또는 $a \le -1$을 얻는다. 이제 $1 \le a \le 2$임을 고려하면, $1 \le a \le \sqrt{2}$이어야 한다.

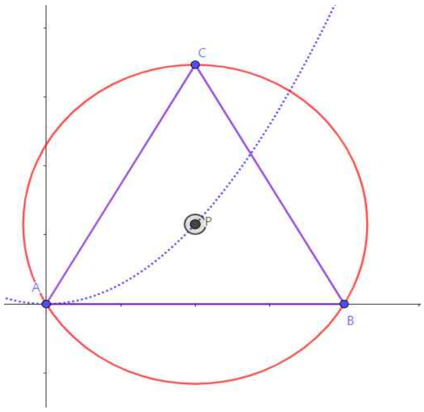
(경우2) $a \ge 2$: 이 경우 닫힌 구간 $[0,2]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(2) = (2-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$이고 최댓값은 $f(0) = a^2 + \frac{1}{3}a^4$이므로, $f_1(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $(2-a)^2 + \frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3} \le a^2 + \frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $(2-a)^2 + \frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3}$를 풀면, $a^4 + 3a^2 - 12a + 8 = (a-1)(a^3 + a^2 + 4a - 8) \le 0$이 되는데, 주어진 조건 $a \ge 2$로부터 $a-1 \ge 1$이고, $a^3 + a^2 + 4a - 8 = a^3 - 8 + a^2 + 4a = (a-2)(a^2+2a+4) + a(a+4) \ge 12$이므로, 이 경우에 부등식

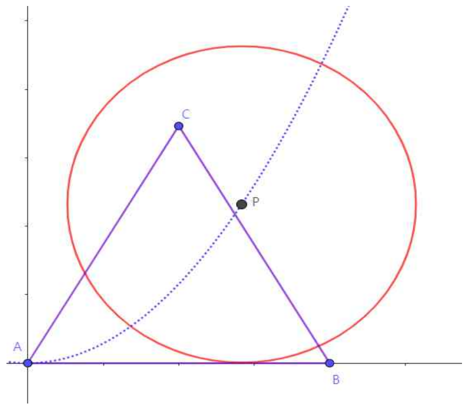
논술문제 해설지(수리 논술)

[문제 3 −i]

○ 예시답안 (계속)

$(2-a)^2+\frac{1}{3}a^4 \le \frac{4}{3}$를 만족하는 a는 존재하지 않는다. 따라서 (경우1)과 (경우2)를 종합적으로 고려하면, $f_1(a) \ge 1$이기 위한 a의 범위는 $1 \le a \le \sqrt{2}$임을 알 수 있다. 아래 그림은 각각 $a=1$인 경우와 $a=\sqrt{2}$인 경우의 그림이다.





○ 채점기준

(4점) 원 C_a와 선분 AB의 교점이 생길 필요충분조건을 거리함수와 관련지어 설정한다.

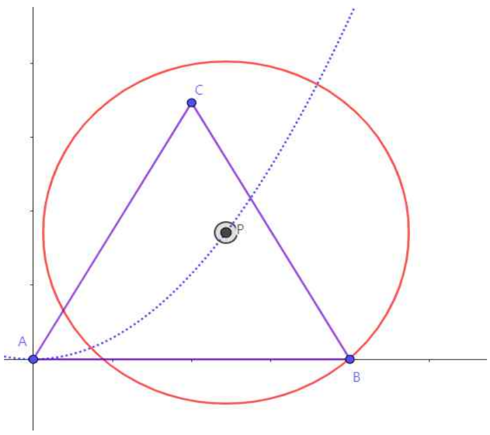
(6점) a의 범위를 두 가지 경우로 나누어, 거리함수와 관련지어 설정한 부등식을 해결한다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 3 −ii]

○ 예시답안

[문제 3 −i]의 풀이로부터 $f_1(a) \ge 1$이기 위한 a의 범위는 $1 \le a \le \sqrt{2}$이 됨을 알았다. $1 \le a \le \sqrt{2}$일 때, 닫힌 구간 $[0,2]$에서 이차함수 $f(x)=(x-a)^2+\frac{1}{3}a^4$의 그래프의 개형을 살펴보면, $y=f(x)$와 $y=\frac{4}{3}$의 교점이 2개가 되기 위한 필요충분조건은 $f(a)<\frac{4}{3} \le f(2)$가 됨을 알 수 있다. 따라서 $f_1(a)=2$일 필요충분조건은 $\frac{1}{3}a^4 < \frac{4}{3} \le (2-a)^2+\frac{1}{3}a^4$이 된다. 여기서 $\frac{1}{3}a^4<\frac{4}{3}$를 풀면, $a^4-4=(a^2+2)(a^2-2)<0$이므로 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$를 얻는다. 또한 $\frac{4}{3} \le (2-a)^2+\frac{1}{3}a^4$을 풀면, $a^4+3a^2-12a+8=(a-1)(a^3+a^2+4a-8) \ge 0$이 되는데, a의 범위인 $1 \le a \le \sqrt{2}$를 감안하면, $a^3+a^2+4a-8 \ge 0$이 되어야 한다. 이제 함수 $k(a)=a^3+a^2+4a-8$이라고 두면, 이것의 도함수는 $3a^2+2a+4$는 항상 양수이므로, 함수 $k(a)$는 증가함수가 됨을 알 수 있다. 또한 $k(1)=-2<0$이고 $k(\sqrt{2})=6\sqrt{2}-6>0$이므로, $k(x)=0$의 실근은 1과 $\sqrt{2}$ 사이에 딱 하나 존재함을 알 수 있다. 이 실근을 α라고 두면, $f_1(a)=2$일 필요충분조건은 $a=1$ 또는 $\alpha \le a < \sqrt{2}$가 된다. 따라서 $f_1(a)=2$인 1보다 큰 a의 값들 중에서 가장 작은 값을 m이라고 두면, $m=\alpha$가 되고, m이 만족하는 최고차항의 계수가 1인 정수계수 삼차다항식 중 하나는 x^3+x^2+4x-8임을 알 수 있다. 참고로 아래 그림은 $a=m$인 경우의 그림이다.



○ 채점기준

(5점) $f_1(a)=2$이기 위해 a가 만족해야되는 부등식을 올바로 구한다.

(5점) a가 만족해야되는 부등식을 풀고, m이 만족하는 삼차다항식을 제대로 구한다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 3 −iii]

○ 예시답안

선분 AC 위의 임의의 점을 $(x, \sqrt{3}x)$로 놓자. 여기서 $0 \le x \le 1$이다. 원 C_a와 선분 AC의 교점이 생길 필요충분조건은 두 점 $(x, \sqrt{3}x)$와 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이 되는 x가 0과 1 사이에 존재한다는 것이다. 두 점 $(x, \sqrt{3}x)$와 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리의 제곱을 $g(x)$로 두면, $g(x) = (x-a)^2 + \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2 = 4\left(x - \frac{(a+a^2)}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}a^2(a-3)^2$이므로 $g(x) = \frac{4}{3}$가 되는 x를 닫힌 구간 $[0,1]$에서 찾도록 하자. $a \ge 1$이므로, $\frac{1}{2} \le \frac{a+a^2}{4}$이다. 또한 $\frac{a+a^2}{4} = 1$이 되는 a는 $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$이므로, 다음 두 가지 경우로 나누어서 생각해보도록 하겠다.

(경우1) $1 \le a \le \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$: 이 경우 $\frac{1}{2} \le \frac{a+a^2}{4} \le 1$이므로, 닫힌 구간 $[0,1]$에서 $g(x)$의 최솟값은 $g\left(\frac{a+a^2}{4}\right) = \frac{1}{12}a^2(a-3)^2$이고 최댓값은 $g(0) = a^2 + \frac{1}{3}a^4$이 된다. 따라서, $f_2(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $\frac{1}{12}a^2(a-3)^2 \le \frac{4}{3} \le a^2 + \frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $\frac{1}{12}a^2(a-3)^2 \le \frac{4}{3}$를 풀면, $(a^2-3a+4)(a^2-3a-4) = (a^2-3a+4)(a+1)(a-4) \le 0$이고, a^2-3a+4는 항상 양수 값을 가지므로 $-1 \le a \le 4$를 얻는다. 또한 $\frac{4}{3} \le a^2 + \frac{1}{3}a^4$를 풀면, $a^4 + 3a^2 - 4 \ge 0$이므로 $(a^2-1)(a^2+4) \ge 0$이 되어 $a \ge 1$ 또는 $a \le -1$을 얻는다. 따라서 $1 \le a \le \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$인 모든 a에 대하여 $f_2(a) \ge 1$임을 알 수 있다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 3 −iii]

○ 예시답안 (계속)

(경우2) $a \ge \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$: 이 경우 $\frac{a+a^2}{4} \ge 1$이므로, 닫힌 구간 $[0,1]$에서 $g(x)$의 최솟값은 $g(1) = (1-a)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2$이고 최댓값은 $g(0) = a^2 + \frac{1}{3}a^4$이 된다. 따라서 이 경우에, $f_2(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $(1-a)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2 \le \frac{4}{3} \le a^2 + \frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $(1-a)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2 \le \frac{4}{3}$를 풀면, $a^4 - 3a^2 - 6a + 8 \le 0$이 되어 $(a-1)(a-2)(a^2+3a+4) \le 0$이므로, $1 \le a \le 2$가 된다. 또한 $\frac{4}{3} \le a^2 + \frac{1}{3}a^4$를 풀면, $a^4 + 3a^2 - 4 \ge 0$이므로 $(a^2-1)(a^2+4) \ge 0$이 되어 $a \ge 1$ 또는 $a \le -1$을 얻는다. 이제 $a \ge \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$임을 감안하면, $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \le a \le 2$임을 알 수 있다.

이제 (경우1)과 (경우2)를 종합적으로 고려하면, $f_2(a) \ge 1$이기 위한 a의 범위는 $1 \le a \le 2$가 됨을 알 수 있다.

○ 채점기준

(4점) 원 C_a와 선분 AC의 교점이 생길 필요충분조건을 거리함수와 관련지어 설정한다.

(6점) a의 범위를 두 가지 경우로 나누어, 거리함수와 관련지어 설정한 부등식을 해결한다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 3 −iv]

○ 예시답안

선분 BC 위의 임의의 점을 $(x, \sqrt{3}(2-x))$로 놓자. 여기서 $1 \le x \le 2$이다. 원 C_a와 선분 BC의 교점이 생길 필요충분조건은 두 점 $(x, \sqrt{3}(2-x))$와 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이 되는 x가 1과 2 사이에 존재한다는 것이다. 두 점 $(x, \sqrt{3}(2-x))$와 $\left(a, \frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$ 사이의 거리의 제곱을 이차함수 $h(x)$로 두자. 그러면, $h(x)$는 다음과 같다.

$h(x) = (x-a)^2 + \left(\sqrt{3}(2-x) - \frac{1}{\sqrt{3}}a^2\right)^2 = 4\left(x - \frac{(a-a^2+6)}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}(a^2+3a-6)^2$. 이제 $h(x) = \frac{4}{3}$가 되는 x를 닫힌 구간 $[1,2]$에서 찾도록 하자. $a \ge 1$이므로, $\frac{a-a^2+6}{4} \le \frac{3}{2}$이다. 또한 $\frac{a-a^2+6}{4} = 1$이 되는 a는 2이므로, 다음 두 가지 경우로 나누어서 생각해보도록 하겠다.

(경우1) $1 \le a \le 2$: 이 경우 $1 \le \frac{a-a^2+6}{4} \le \frac{3}{2}$이므로, 닫힌 구간 $[1,2]$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h\left(\frac{a-a^2+6}{4}\right) = \frac{1}{12}(a^2+3a-6)^2$이고 최댓값은 $h(2) = (2-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$이 된다. 따라서, $f_3(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $\frac{1}{12}(a^2+3a-6)^2 \le \frac{4}{3} \le (2-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $\frac{1}{12}(a^2+3a-6)^2 \le \frac{4}{3}$를 풀면, $(a^2+3a-10)(a^2+3a-2) = (a-2)(a+5)(a^2+3a-2) \le 0$이고, $1 \le a \le 2$에서 $(a+5)(a^2+3a-2)$는 항상 양수 값을 가지므로 $1 \le a \le 2$를 얻는다. 또한 $\frac{4}{3} \le (2-a)^2 + \frac{1}{3}a^4$을 풀면, [문제 3 −ii]의 풀이로부터 $a=1$ 또는 $a \ge m$임을 알 수 있다. 따라서 $f_3(a) \ge 1$일 필요충분조건은 $a=1$ 또는 $m \le a \le 2$이 된다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[문제 3 −iv]

○ 예시답안 (계속)

(경우2) $a \geq 2$: 이 경우 $\frac{a-a^2+6}{4} \leq 1$이므로, 닫힌 구간 $[1,2]$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=\frac{a^4}{3}-a^2-2a+4$이고 최댓값은 $h(2)=(2-a)^2+\frac{1}{3}a^4$이 된다. 따라서, $f_3(a) \geq 1$일 필요충분조건은 $\frac{a^4}{3}-a^2-2a+4 \leq \frac{4}{3} \leq (2-a)^2+\frac{1}{3}a^4$임을 알 수 있다. 여기서 $\frac{a^4}{3}-a^2-2a+4 \leq \frac{4}{3}$ 를 풀면, $a^4-3a^2-6a+8 \leq 0$이 되어 $(a-1)(a-2)(a^2+3a+4) \leq 0$이므로, $1 \leq a \leq 2$가 된다. $a=2$인 경우에, $\frac{4}{3} \leq (2-a)^2+\frac{1}{3}a^4$도 만족되므로, 이 경우에 $a=2$만이 $f_3(a) \geq 1$이 된다.

이제 (경우1)과 (경우2)를 종합적으로 고려하면, $f_3(a) \geq 1$이기 위한 a의 범위는 $a=1$ 또는 $m \leq a \leq 2$가 된다.

○ 채점기준

(4점) 원 C_a와 선분 BC의 교점이 생길 필요충분조건을 거리함수와 관련지어 설정한다.

(6점) a의 범위를 두 가지 경우로 나누어, 거리함수와 관련지어 설정한 부등식을 해결한다.

논술문제 해설지 (수리 논술)

[별해]

거리함수 대신에 중심에서 직선까지의 거리(점과 직선 사이의 거리 공식 활용)가 반지름의 길이보다 작거나 같다와 정삼각형 각 꼭짓점까지의 거리를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. $a=1$일 때는 중심의 좌표가 정삼각형의 무게중심, 즉 외심의 좌표와 같기 때문에 두 번째 문제를 제외하고 모두 $a=1$이 답에 포함이 됨을 알 수 있다. 원의 중심은 함수 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x^2$의 그래프 위에서 움직이고 반지름의 길이는 일정하다. 그래서 [문제 3 −i]의 경우, 중심의 y좌표가 반지름의 길이보다 작거나 같아야하므로, 이로부터 $1 \le a \le \sqrt{2}$가 나오고 해당 범위에서 원의 중심에서 x축에 내린 수선의 발이 점 B를 넘어서지 않기 때문에 위에서 구한 범위가 답이 된다. [문제 3 −ii]의 경우에는 중심에서 점 B까지의 거리가 반지름의 길이보다 크거나 같으면 되기 때문에, 이로부터 답을 구할 수 있다. 나머지 문제들도 비슷한 방법으로 해결이 가능하다.

1398

성균관대학교

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY