2024학년도 모의논술

논술문제 해설지
자연계

성균관대학교
SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 1]

■ 개요 및 주요 평가항목

곡선 위의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 미분을 활용하여 구하고, 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 적분을 활용하여 구할 수 있는 능력을 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중 미분을 활용한 접선의 방정식, 적분을 활용한 도형의 넓이 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제이다.

[문제 1 − i]

곡선 위의 한 점 $(0, 0)$에서 그은 접선의 방정식과 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

[문제 1 − ii]

곡선 위의 임의의 점 $(k, k-k^2)$에서 그은 접선의 방정식을 제대로 구하고, 이를 이용하여 접선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

[문제 1 − iii]

k가 유리수 $\dfrac{1}{n}$로 주어질 때, $B\left(\dfrac{1}{n}\right)$의 값이 무리수임을 논할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 1 – i]

○ 예시답안

$k=0$일 때, 직선 ℓ은 점 $(0,0)$을 지나고 기울기가 1이 되므로, 직선 ℓ의 방정식은 $y=x$가 된다. 따라서 $A(0)$은 곡선 $y=x-x^2$, 직선 $y=x$, 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 다음과 같은 정적분의 값으로 주어진다.

$$A(0)=\int_0^1 (x-(x-x^2))dx=\frac{1}{3}$$

한편, $k=0$일 때, 직선 ℓ과 곡선 $y=x^2-x$이 만나는 점 중에서 1사분면에 있는 점의 좌표는 $(2,2)$가 된다. 따라서 $B(0)$은 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 영역 중에서 직선 $x=1$의 오른쪽에 있는 부분의 넓이이므로 다음과 같은 정적분의 값으로 주어진다.

$$B(0)=\int_1^2 (x-(x^2-x))dx=\frac{2}{3}$$

따라서 $A(0):B(0)=1:2$가 된다.

○ 채점기준

(5점) 도형의 넓이 $A(0)$을 적분을 통해 구할 수 있다.

(5점) 도형의 넓이 $B(0)$을 적분을 통해 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 1 − ii]

○ 예시답안

직선 ℓ은 점 $(k, k-k^2)$를 지나고, 기울기가 $1-2k$이므로, 직선 ℓ의 방정식은 $y=(1-2k)(x-k)+k-k^2$과 같게 된다. 이제 직선 ℓ의 방정식과 $y=x^2-x$를 연립해서 풀자. 연립방정식의 두 해의 x좌표 중에서 양수인 경우만을 택하면, $\alpha=1-k+\sqrt{1-2k+2k^2}$이 되고, 이 값은

$$1-k+\sqrt{1-2k+2k^2}=1-k+\sqrt{(1-k)^2+k^2}>1-k+\sqrt{k^2}=1$$

이 되므로, 항상 1보다 커짐을 알 수 있다. 따라서 $B(k)$는 곡선 $y=x^2-x$와 직선 ℓ로 둘러싸인 영역 중에서 직선 $x=1$의 오른쪽에 있는 부분의 넓이이므로, 다음과 같은 정적분의 값으로 주어진다.

$$\begin{aligned} B(k) &= \int_1^{\alpha}((1-2k)(x-k)+k-k^2-(x^2-x))dx \\ &= \int_1^{\alpha}(k^2+2x-2kx-x^2)dx \\ &= k^2(\alpha-1)+(1-k)(\alpha^2-1)-\frac{1}{3}(\alpha^3-1) \\ &= (\alpha-1)\left\{k^2-k(\alpha+1)-\frac{1}{3}(\alpha^2-2\alpha-2)\right\} \end{aligned}$$

위의 값은 k와 α에 대한 다항식의 형태임을 알 수 있다.

○ 채점기준

(2점) 직선 ℓ의 방정식을 제대로 구할 수 있다.

(8점) 도형의 넓이 $B(k)$를 k와 α에 대한 다항식의 형태로 올바르게 표현할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 1 −iii]

○ 예시답안

[문제 1−ii]의 풀이로부터,

$\alpha=1-k+\sqrt{1-2k+2k^2}$ 이고, $B(k)=k^2(\alpha-1)+(1-k)(\alpha^2-1)-\frac{1}{3}(\alpha^3-1)$로 주어진다.

$k=\frac{1}{n}$을 위 식에 대입하면, $\alpha=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-2n+2}$가 되고, $B\left(\frac{1}{n}\right)$을 α에 대한 다항식 형태로 정리하면,

$$B\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{3}\alpha^3+\left(1-\frac{1}{n}\right)\alpha^2+\frac{1}{n^2}\alpha-\frac{2}{3}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$$

이 된다. 이제 $\alpha=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-2n+2}$를 위 식에 대입해서 정리하면,

$$B\left(\frac{1}{n}\right)=C+D\sqrt{n^2-2n+2}\ \ (C\text{와 } D\text{는 각각 유리수})$$

의 형태가 된다. 여기서 구체적으로 D를 구하면,

$$D=\frac{2}{3n}-\frac{4}{3n^2}+\frac{4}{3n^3}=\frac{2}{3n^3}(n^2-2n+2)=\frac{2}{3n^3}((n-1)^2+1)>0$$

이 되므로, D는 항상 양수가 됨을 보일 수 있다.

○ 채점기준

(5점) $B\left(\frac{1}{n}\right)$을 $C+D\sqrt{n^2-2n+2}$ 형태로 표현하고, C와 D는 각각 유리수임을 올바르게 논할 수 있다.

(5점) 유리수 D에 대한 구체적인 표현을 구하고, 항상 양수가 됨을 제대로 논할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 2]

■ 개요 및 주요 평가항목

절댓값으로 정의된 함수의 정적분 값으로 정의된 수열의 값을 구할 수 있고, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소에 대한 개념을 올바르게 이해하고 있는지 평가하는 문제이다. 그리고, 로그의 뜻을 제대로 이해하여 연립일차방정식을 푸는 데 활용할 수 있는지도 평가한다. 본 문제는 고교 과정 중 지수와 로그, 등비수열, 도함수의 활용, 정적분 등을 이해하고 있으면 해결할 수 있는 문제이다.

[문제 2 – i]

정적분의 뜻을 알고, 이를 통해 정적분의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 2 – ii]

함수의 증가와 감소, 극소를 판정하고 설명할 수 있는지 평가한다.

[문제 2 – iii]

등비수열과 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하여 올바르게 활용할 수 있는지 평가한다.

논술문제 해설지 (자연계)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 2 − i]

○ 예시답안

조건 $f(Ax)=Af(x)$로부터, 점 (a,b)가 그래프 $y=f(x)$의 위에 있다면 점 (Aa,Ab)도 역시 그래프 $y=f(x)$의 위에 있어야 한다는 사실을 알 수 있다.

정적분 $\int_1^3 f(x)dx$의 값은 밑변의 길이가 2이고 높이가 1인 삼각형의 넓이이므로, 그 값은 1이다. 따라서, 닫힌 구간 $[3,9]$에서의 정적분 $\int_3^9 f(x)dx$의 값은 밑변의 길이가 6이고 높이가 3인 삼각형의 넓이이므로 그 값은 9이다. 마찬가지로 $\int_2^3 f(x)dx=\frac{1}{2}$이므로, $\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=\frac{1}{18}$이다. 따라서, $\int_{\frac{2}{3}}^9 f(x)dx=1+9+\frac{1}{18}=\frac{181}{18}$이다.

○ 채점기준

(5점) 함수 $f(x)$의 그래프를 올바르게 구할 수 있다.

(5점) 정적분의 값을 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 2 − ii]

○ 예시답안

삼차함수 $g(x)=x^3-9x^2+18x=x(x-3)(x-6)$는 세 개의 해 $x=0, 3, 6$을 가지고,

$g'(x)=3(x^2-6x+6)$이므로 $x=3-\sqrt{3}$에서 극댓값, $x=3+\sqrt{3}$에서 극솟값을 가진다.

한편, 함수 $f(x)$의 그래프는 정수 k에 대해 $x=2^k$에서 극솟값 0을 가지고,

$x=\frac{1}{2}(2^k+2^{k+1})$에서 극댓값 $x=2^{k-1}$을 가진다.

닫힌 구간 $[1, 100]$을 $[1,2), [2,4), [4,8), [8,16), [16,32), [32,64), [64,100]$으로 나누어서 생각하자.

(a) 구간 $[1, 2)$와 $[2, 4)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 각각 $\frac{1}{2}$, 1이고 $1<3-\sqrt{3}$이므로, $(g\circ f)(x)$의 극솟값은 $x=1, 2$에서 발생한다. 즉, 각 구간에서 극솟값이 한 번씩 발생한다.

(b) 구간 $[4, 8), [8, 16)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 각각 2, 4이고 $3-\sqrt{3}<2,4<3+\sqrt{3}$이므로, $(g\circ f)(x)$의 극솟값은 $x=4, 6, 8, 12$에서 발생한다. 즉, 각 구간에서 극솟값이 두 번씩 발생한다.

(c) 구간 $[16,32), [32,64), [64,128)$에서 함수 $f(x)$의 각각의 최댓값은 $3+\sqrt{3}$보다 크므로, $(g\circ f)(x)$의 극솟값은 각 구간에서 3번씩 발생한다. 하지만, $x=100$에서의 함수값 $f(100)=64f\left(\frac{100}{64}\right)=64\times\frac{7}{16}=28>4$이므로, 마지막 닫힌 구간 $[64, 100]$에서는 극솟값이 2번 발생한다.

(a),(b),(c)를 종합하면, 극솟값은 $2\times1+2\times2+3\times2+2=14$번 발생한다.

○ 채점기준

(5점) 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 증가와 감소, 극대와 극소를 올바르게 구할 수 있다.

(5점) 극솟값의 개수를 올바르게 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 2 −iii]

○ 예시답안

$a_1 = a = \frac{B(A-1)}{2}$라고 두면, $a_n = a(A^2)^{n-1}$이 된다. $\log_3 a_n = \log_3 a + 2(n-1)\log_3 A$의 값이 항상 정수이므로, $\log_3 a = P$와 $2\log_3 A = Q$의 값 모두 정수이다.

문제의 첫 번째 조건으로부터

$$\sum_{n=1}^{6} \log_3 a_n = 6\log_3 a + 15 \times 2\log_3 A = 6P + 15Q = 117$$

이므로, 식 $2P + 5Q = 39$를 얻을 수 있다.

또한, 문제의 두 번째 조건으로부터

$$\log_3\left(\sum_{n=1}^{6} a_n\right) = \log_3\left(a\frac{A^{12}-1}{A^2-1}\right) = P + \log_3\left(\frac{A^{12}-1}{A^2-1}\right) = P + 5Q + \log_3\left(\frac{1-\frac{1}{A^{12}}}{1-\frac{1}{A^2}}\right)$$

을 얻을 수 있다. $2\log_3 A = Q$가 0보다 큰 정수이므로, $2\log_3 A \geq 1$이 되어 $A^2 \geq 3$이다.

따라서, $1 < \frac{1-\frac{1}{A^{12}}}{1-\frac{1}{A^2}} < \frac{3}{2}$이므로 $0 < \log_3\left(\frac{1-\frac{1}{A^{12}}}{1-\frac{1}{A^2}}\right) < 1$이 되어, 식 $P + 5Q = 37$을 얻을 수 있다. 이 두 식을 연립하면, 해 $(P, Q) = (2, 7)$을 얻을 수 있다. 이로부터, $A = 3^{\frac{7}{2}} = 27\sqrt{3}$와 $B = \frac{18}{27\sqrt{3}-1}$를 얻게 되어, 유일한 순서쌍 $(A, B) = \left(27\sqrt{3}, \frac{18}{27\sqrt{3}-1}\right)$를 얻을 수 있다.

○ 채점기준

(3점) 수열 a_n의 일반항을 구할 수 있다.

(3점) 첫 번째 조건을 수식화할 수 있다.

(5점) 두 번째 조건을 적절한 등식으로 치환할 수 있다.

(4점) 순서쌍 (A, B)를 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 3]

■ 개요 및 주요 평가항목

수열의 정의에 따라 수열의 값을 구할 수 있고, 함수의 미분 불가능한 점의 개념과 함수의 그래프의 평행이동을 제대로 이해하고 있는지 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교 과정 중 수열의 정의, 함수의 미분 가능, 미분 불가능의 개념, 함수의 그래프의 평행이동, 정적분의 계산 등을 이해하고 있으면, 해결할 수 있는 문제이다.

[문제 3 – i]

수열의 정의에 따라 수열의 값을 구하고, 이와 관련된 함수의 그래프의 평행이동을 통하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

[문제 3 – ii]

함수의 미분 가능과 미분 불가능의 개념을 제대로 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 3 – iii]

함수의 주기성을 이용하여 주어진 정적분의 값을 제대로 구할 수 있다.

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 3 − i]

○ 예시답안

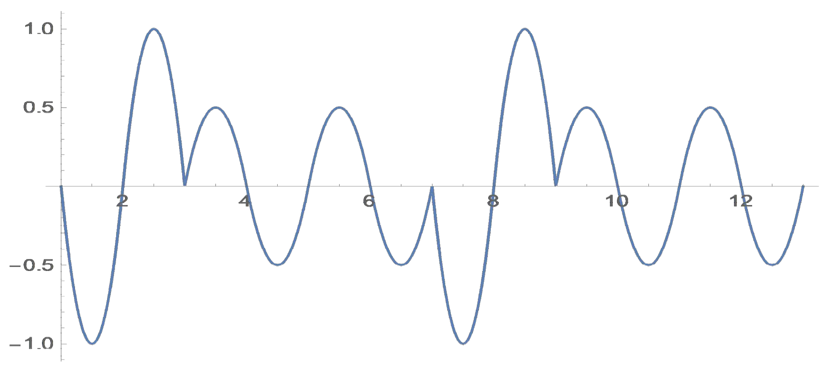
$1 \le n \le 20$에 대하여, 수열 a_n의 값과 $f(n)$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	6	3	4	5	2	1	6	3	4	5	2	1	6	3	4	5	2	1	6
$f(n)$	−4	4	2	−2	2	−2	−4	4	2	−2	2	−2	−4	4	2	−2	2	−2	−4	4

한편, $1 \le x < 7$에 대하여 함수 $h(x)$의 구체적인 표현은 아래와 같다.

$$h(x) = \begin{cases} -4g(x-1), & 1 \le x < 2 \\ 4g(x-2), & 2 \le x < 3 \\ 2g(x-3), & 3 \le x < 4 \\ -2g(x-4), & 4 \le x < 5 \\ 2g(x-5), & 5 \le x < 6 \\ -2g(x-6), & 6 \le x < 7 \end{cases}$$

$g(x-m)$의 그래프는 $g(x)$의 그래프를 x축으로 m만큼 평행 이동하여 얻어지고, $h(x) = h(x-6)$이므로, 함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



○ 채점기준

(5점) 수열 a_n과 함수 $f(n)$의 정의에 따라 수열의 값과 함수의 값을 구하고, 이를 표로 나타낼 수 있다.

(5점) 함수 $f(n)$의 값과 함수 $h(x)$의 정의로부터, 함수 $h(x)$의 그래프의 개형을 올바로 그릴 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 3 – ii]

○ 예시답안

$y=g(x)$의 $x=0$에서의 기울기는 1이고, $x=1$에서의 기울기는 -1이다. $g(x-m)$의 그래프는 $g(x)$의 그래프를 x-축으로 m만큼 평행 이동하여 얻어지므로, $y=g(x-m)$의 $x=m$에서의 기울기는 1이고, $x=m+1$에서의 기울기는 -1이 된다. 또한 $y=c \cdot g(x-m)$의 $x=m$에서의 기울기는 c이고, $x=m+1$에서의 기울기는 $-c$가 된다. 이제, 풀이 (i)에 주어진 구간 $1 \le x < 7$에서의 함수 $h(x)$의 구체적인 표현과 $h(x)=h(x+6)$라는 성질로부터, $h(x)$의 미분불가능한 점은

$$x=3+6k,\ x=7+6k\ (k=0,1,2,\cdots)$$

에서 발생함을 알 수 있다. 따라서, 구간 $1<x<100$에서 $h(x)$의 미분불가능한 점은

$$x=3+6k\ (k=0,1,2,\cdots,16),\ x=7+6k\ (k=0,1,2,\cdots,15)$$

이므로, 이들의 총 개수는 $17+16=33$개가 된다.

○ 채점기준

(8점) 함수 $h(x)$의 미분불가능한 점은 $x=3+6k$, $x=7+6k$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$에서 발생함을 보일 수 있다.

(2점) 구간 $1<x<100$에서 $h(x)$의 미분불가능한 점의 개수가 총 33개임을 보일 수 있다.

논술문제 해설지 (자연계)

[문제 3 −iii]

○ 예시답안

모든 실수 x에 대하여, $h(x)=h(x+6)$이므로, 다음의 등식이 성립한다.

$$\int_1^7 h(x)dx=\int_{1+6k}^{7+6k} h(x)dx$$

위의 등식으로부터, 정적분 $\int_1^{100} h(x)dx$의 값은 다음과 같이 표현됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_1^{100} h(x)dx&=\int_1^7 h(x)dx+\int_7^{13} h(x)dx+\cdots+\int_{91}^{97} h(x)dx+\int_{97}^{100} h(x)dx\\&=16\int_1^7 h(x)dx+\int_1^4 h(x)dx\end{aligned}$$

한편, 풀이 (i)에 주어진 $1\le x<7$일 때, 함수 $h(x)$의 구체적인 표현식으로부터, $\int_1^7 h(x)dx$의 값과 $\int_1^4 h(x)dx$의 값은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\int_1^7 h(x)dx=&\int_1^2(-4)g(x-1)dx+\int_2^3 4g(x-2)dx+\int_3^4 2g(x-3)dx+\int_4^5(-2)g(x-4)dx\\&+\int_5^6 2g(x-5)dx+\int_6^7(-2)g(x-6)dx\\=&((-4)+4+2+(-2)+2+(-2))\int_0^1 g(t)dt=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 h(x)dx=&\int_1^2(-4)g(x-1)dx+\int_2^3 4g(x-2)dx+\int_3^4 2g(x-3)dx\\=&((-4)+4+2)\int_0^1 g(t)dt=2\int_0^1(t-t^2)dt=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

따라서, 정적분 $\int_1^{100} h(x)dx$의 값은 $\frac{1}{3}$이 된다.

○ 채점기준

(5점) $\int_1^{100} h(x)dx$의 값이 $16\int_1^7 h(x)dx+\int_1^4 h(x)dx$과 같음을 보일 수 있다.

(10점) $16\int_1^7 h(x)dx+\int_1^4 h(x)dx$의 값을 제대로 계산할 수 있다.