2026학년도 모의논술

논술문제 해설지
수리형

성균관대학교
SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 1]

■ 개요 및 주요 평가항목

로그 개념을 이용하여 수학적으로 정의된 집합의 원소들의 합을 구하는 문제이다. 매우 큰 수의 약수들에 특정한 밑을 가지는 로그함수를 취해 나오는 수들로 이루어진 집합의 원소들의 합을 구하는 과정에서, 등차수열의 개념과 합을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[문제 1 – i]

등차수열의 합을 구할 수 있는지 평가하고자 한다.

[문제 1 – ii]

등차수열의 합과 로그의 성질을 활용할 수 있는지 평가하고자 한다.

[문제 1 – iii]

등차수열의 합과 로그의 성질을 활용할 수 있는지 평가하고자 한다.

논술문제 해설지 (수리형)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 1 − i]

○ 예시답안

자연수 2^{2025}의 약수는 $1, 2, 4, \cdots, 2^{2025}$이고, 여기에 $\log_2$를 취했으므로, 집합 A는

$$A = \{0, 1, 2, \cdots, 2025\}$$

이다. 따라서, $S(A) = \dfrac{2025 \times 2026}{2} = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 1013$이다.

○ 채점기준

(5점) 집합 A를 올바르게 구할 수 있다.

(5점) $S(A)$의 값을 올바르게 구하고 소인수분해할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 1 − ii]

○ 예시답안

집합 A의 원소는 $0 \le a, b \le 2025$인 정수 a, b에 대하여 $\log_{10} 2^a 5^b$의 형태를 가진다.

따라서, $S(A)$의 값은 10^{2025}의 모든 약수들의 곱에 $\log_{10}$를 취한 것과 같다.

고정된 a에 대하여, 2^a에 의해 나눠지지만 2^{a+1}에 의해서 나눠지지 않는 약수는

$2^a, 2^a 5, 2^a 5^2, \cdots, 2^a 5^{2025}$가 되어 모두 2026개다. 마찬가지로 고정된 b에 대하여, 2^b에 의해

나눠지지만 2^{b+1}에 의해서 나눠지지 않는 약수는 모두 2026개다.

따라서,
$$\begin{aligned} S(A) &= \log_{10}\left(2^{0\times 2026} 2^{1\times 2026} \cdots 2^{2025\times 2026} \times 5^{0\times 2026} 5^{1\times 2026} \cdots 5^{2025\times 2026}\right) \\ &= \log_{10} 10^{2026(0+1+\cdots+2025)} \\ &= 2026 \times \frac{2025\times 2026}{2} \\ &= 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 1013^2 \end{aligned}$$

이다.

○ 채점기준

(5점) 집합 A를 올바르게 구할 수 있다.

(5점) $S(A)$의 값을 올바르게 구하고 소인수분해할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 1 −iii]

○ 예시답안

집합 A_1를 10^{2025}의 짝수인 약수에 $\log_{10}$를 취한 수들의 집합이라고 하고, 집합 A_2를 10^{2025}의 홀수인 약수에 $-\log_{10}$를 취한 수들의 집합이라고 하자. 그러면, $A=A_1 \cup A_2$이고 $S(A)=S(A_1)+S(A_2)$가 성립한다.

집합 A_1의 원소는 $1 \le a \le 2025$와 $0 \le b \le 2025$인 정수 a, b에 대하여 $\log_{10} 2^a 5^b$의 형태를 띠므로, [문제 1−ii]에서와 같은 방법으로

$$S(A_1)=\log_{10}\left(2^{1\times 2026} \cdots 2^{2025\times 2026} \times 5^{0\times 2025} 5^{1\times 2025} \cdots 5^{2025\times 2025}\right)$$
$$=\log_{10} 2^{2026(1+\cdots+2025)} 5^{2025(0+1+\cdots+2025)}$$

임을 알 수 있다. 집합 A_2의 원소는 $0 \le b \le 2025$인 정수 b에 대하여 $-\log_{10} 5^b$의 형태를 띠므로,

$$S(A_2)=-\log_{10}\left(5^{0+1+\cdots 2025}\right)$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} S(A) &= S(A_1)+S(A_2) \\ &= \log_{10} 2^{\frac{2026^2\times 2025}{2}} 5^{\frac{2024\times 2025\times 2026}{2}} \\ &= \left(\frac{2024\times 2025\times 2026}{2}\right)+\log_{10} 2^{2025\times 2026} \end{aligned}$$

이고, $S(A)-2025\cdot 2026\cdot \log_{10} 2 = 2^3\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 11\cdot 23\cdot 1013$이다.

○ 채점기준

(5점) 집합 A를 올바르게 구할 수 있다.

(5점) $S(A)-2025\cdot 2026\cdot \log_{10} 2$의 값을 올바르게 구하고 소인수분해할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 2]

■ 개요 및 주요 평가항목

좌표 평면 위에 주어진 네 점을 꼭짓점으로 갖는 사각형과 관련된 기하에 관한 문제로서, 이를 삼각형의 합동, 도형의 넓이, 호의 길이와 연관짓는 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하는 문제이다. 본 문제는 고교과정 중 도형의 넓이, 미분을 활용한 함수의 최대와 최소, 호도법, 삼각함수 등의 개념을 이해하고 있으면 풀 수 있는 문제이다.

[문제 2 − i]

삼각형의 합동을 이용하여, 사각형 ABGH의 넓이를 삼각형들의 넓이의 합으로 제대로 표현할 수 있는지 평가한다.

[문제 2 − ii]

도함수를 활용하여 문제에 주어진 삼각형의 넓이의 최댓값을 제대로 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 2 − iii]

호도법과 삼각함수의 개념을 이용하여 문제에 주어진 호의 길이를 제대로 구할 수 있는지 평가한다.

논술문제 해설지 (수리형)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 2 – i]

○ 예시답안

삼각형 FBG와 삼각형 FEG는 서로 합동이므로, 사각형 ABGH의 넓이를 네 삼각형(삼각형 AFE, 삼각형 EGH, 삼각형 FBG, 삼각형 EFG)의 넓이의 합으로 표현하면 다음과 같다.

$$9b = 2\triangle \mathrm{FBG} + (\triangle \mathrm{AFE} + \triangle \mathrm{EGH}) = 2\left(\frac{1}{2}ab\right) + \frac{1}{2}(9-a)\overline{\mathrm{AE}} + \frac{1}{2}\cdot 9\cdot \overline{\mathrm{EH}}$$

$$= ab + \frac{1}{2}\cdot 9(\overline{\mathrm{AE}} + \overline{\mathrm{EH}}) - \frac{1}{2}\cdot a\cdot \overline{\mathrm{AE}} = ab + \frac{1}{2}\cdot 9\cdot b - \frac{1}{2}\cdot a\cdot \sqrt{a^2-(9-a)^2}$$

$$= ab + \frac{9b}{2} - \frac{a\sqrt{9(2a-9)}}{2}$$

삼각형 AEF는 빗변의 길이가 $\overline{\mathrm{EF}} = a$이고 $\overline{\mathrm{AF}} = 9-a$인 직각삼각형이다. 따라서 a는 부등식 $\frac{9}{2} < a < 9$를 만족해야하므로, $2a-9$는 양수임을 알 수 있다. 이제 위에서 구한 식으로부터 b를 a에 관하여 풀면, $b = \dfrac{3a}{\sqrt{2a-9}}$를 얻는다.

○ 채점기준

(7점) 삼각형의 합동을 이용하여, 사각형 ABGH의 넓이를 네 삼각형(삼각형 AFE, 삼각형 EGH, 삼각형 FBG, 삼각형 EFG)의 넓이의 합으로 표시하고, 이를 a와 b에 관한 식으로 표현한다.

(3점) b를 a에 관한 식으로 제대로 나타낸다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 2 – ii]

○ 예시답안

[문제 2–i]의 예시답안에서, a는 부등식 $\frac{9}{2} < a < 9$를 만족해야함을 알고 있다. 또한 a와 b는 [문제 2–i]의 답에서 구한 조건, 즉, $b = \frac{3a}{\sqrt{2a-9}} \leq 17$을 추가로 만족해야한다. 함수 $f(a)$를 삼각형 AEF의 넓이의 제곱으로 두자. 그러면, $f(a) = \frac{1}{4}(9-a)^2(a^2-(9-a)^2) = \frac{9}{4}(9-a)^2(2a-9)$이 되고, $f(a)$의 극값을 조사하여 $f(a)$의 최댓값을 구하도록 하자. $f(a)$의 도함수 $f'(a)$를 계산하여 정리하면, $f'(a) = \frac{9}{2}(9-a)(18-3a)$이고, $a=6$일 때 함수 $f(a)$는 극댓값 $f(6) = \frac{243}{4}$을 갖게 되는데, 위에서 구한 조건으로부터 $b = 6\sqrt{3}$이 얻어지고, $(a,b) = (6, 6\sqrt{3})$은 $b \leq 17$을 만족함을 알 수 있다. 또한 $\frac{9}{2} < a < 9$일 때, 함수 $f(a)$의 증감을 살펴보면, 극댓값 $f(6) = \frac{243}{4}$이 최댓값이 됨을 알 수 있다. 따라서 삼각형 삼각형 AEF 넓이의 최댓값은 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$이 된다.

○ 채점기준

(5점) 삼각형 AEF의 넓이의 제곱을 a에 관한 식으로 표현한다.

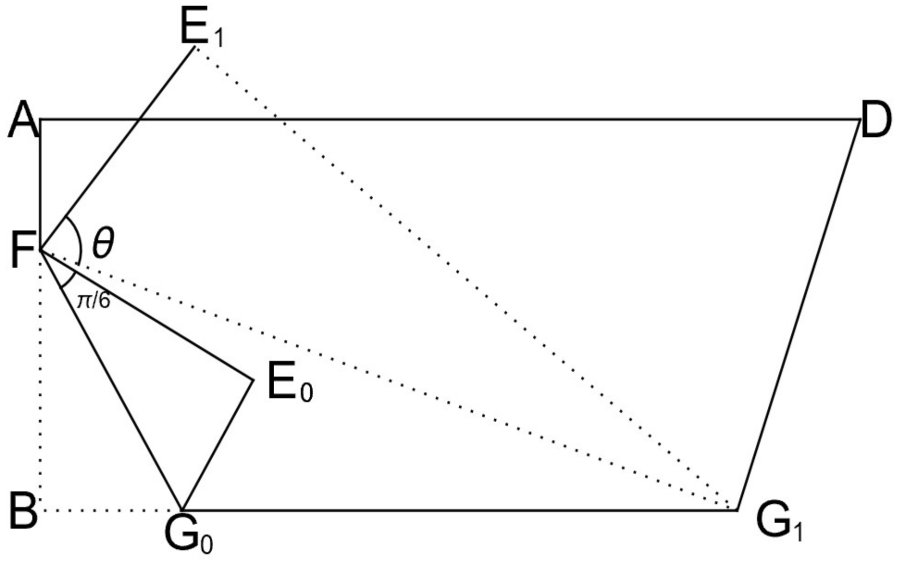
(5점) 도함수를 활용하여 삼각형 AEF의 넓이의 최댓값을 구한다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 2 −iii]

○ 예시답안

점 G_0와 점 G_1을 $G_0=\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-9\right)$, $G_1=C$로 두자. 또한 $G=G_0$일 때, 점 E를 E_0, $G=G_1$일 때, 점 E를 E_1으로 표기하자. 제시된 상황을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



점 G가 점 G_0을 출발하여 선분 BC를 따라 점 G_1까지 움직일 때, 점 E가 그리는 곡선은 중심이 F이고 반지름이 $\overline{EF}=a$인 원의 일부이다. 또한 삼각형 EFG는 삼각형 BFG와 서로 합동인 직각삼각형임을 주목하자. 따라서. 점 G가 점 G_0일 때, $\overline{BG_0}=\overline{E_0G_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}a$이다. 또한 삼각형 E_0FG_0는 $\overline{E_0F}=a$, $\overline{E_0G_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}a$인 직각삼각형이고, $\angle E_0FB=\frac{\pi}{3}$임을 알 수 있다. 한편 점 G가 점 G_1일 때, 삼각형 E_1FG_1는 $\overline{E_1F}=a$, $\overline{E_1G_1}=17$인 직각삼각형이 된다. 이때 $\tan(\angle E_1FG_1)=\frac{17}{a}$이므로, $\angle E_1FG_1=\theta$이고, $\angle E_1FB=2\theta$임을 알 수 있다. 따라서 점 E가 될 수 있는 점들의

집합이 이루는 호에 대한 중심각은 $2\theta-\frac{\pi}{3}$가 되고, $\overline{\mathrm{EF}}=a=\frac{17}{\tan\theta}$이므로, 이 호의 길이는 $\frac{17}{\tan\theta}\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$임을 알 수 있다.

○ 채점기준

(5점) 점 G가 점 G_0일 때, $\angle \mathrm{E}_0\mathrm{FB}$를 구한다.

(5점) 점 G가 점 G_1일 때, $\angle \mathrm{E}_1\mathrm{FB}$를 구한다.

(5점) 점 E가 될 수 있는 점들의 집합이 이루는 호에 대한 중심각을 구하고, 이 호의 길이를 θ에 관한 식으로 표현한다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 3]

■ 개요 및 주요 평가항목

기본적인 이차함수의 그래프 위에 두 점을 잇는 선분과 그래프 사이의 도형의 넓이를 구하는 문제이다. 미분을 이용하여, 함수의 증가와 감소를 판단하고 접선의 방정식을 구할 수 있는지와 정적분 개념을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 3 – i]

내분점의 개념을 이해하고, 정적분을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있다.

[문제 3 – ii]

함수의 증가와 감소를 판단할 수 있다.

[문제 3 – iii]

접선의 방정식을 구하고, 정적분의 값을 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 3 − i]

○ 예시답안

점 P_1의 좌표를 $(-t, t^2)$라고 하면, 점 P_2의 좌표는 $(2t, 4t^2)$이다. $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = 3\sqrt{6}$ 로부터

$9t^2 + 9t^4 = 54$를 얻고, $(t^2-2)(t^2+3) = 0$이다. 따라서, $t^2 = 2$이고 $t = \sqrt{2}$ 이다.

이로부터 $\mathrm{P}_1(-\sqrt{2}, 2)$과 $\mathrm{P}_2(2\sqrt{2}, 8)$을 얻을 수 있고, 이 두 점을 잇는 직선의 방정식은

$y = \sqrt{2}x + 4$이다. 따라서, 도형의 넓이는

$$\int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (\sqrt{2}x + 4 - x^2)dx = 9\sqrt{2}$$

이다.

○ 채점기준

(5점) 두 점 P_1과 P_2의 좌표를 구할 수 있다.

(5점) 도형의 넓이를 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 3 – ii]

○ 예시답안

$k=0$일 때, $\mathrm{P}_1(-\sqrt{2},2)$과 $\mathrm{P}_2(\sqrt{2},2)$이므로 $\frac{n}{m}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$ 이다.

$k=\frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{P}_1(-1,1)$과 $\mathrm{P}_2\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$이므로, $\frac{n}{m}=\frac{1}{4}$이다.

이차곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,x^2)$에 대하여

$$f(x)=\overline{\mathrm{PM}}^2=(x-1)^2+(x^2-2)^2=x^4-3x^2-2x+5$$

라고 하면, $f'(x)=2(x+1)(2x^2-2x-1)=0$의 해는 $x=-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}$가 된다.

따라서, 함수 $f(x)$는 $[-\sqrt{2},-1]$에서는 감소하고, $\left[\sqrt{2},\frac{3}{2}\right]$에서는 증가한다.

이로부터 비율 $\frac{n}{m}$의 값은 $3-2\sqrt{2}$부터 $\frac{1}{4}$까지 증가하게 된다. 즉, $3-2\sqrt{2}\le\frac{n}{m}\le\frac{1}{4}$이다.

○ 채점기준

(5점) 비율 $\frac{n}{m}$의 값의 범위를 구할 수 있다.

(5점) 함수의 증가와 감소를 올바르게 판단할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 3 −iii]

○ 예시답안

선분 P_1P_2를 1:1로 내분하는 점을 M이라 하면, 점 M의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$이다.

이때, $a=\frac{x_1+x_2}{2}$라고 두면, $\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=a^2+\frac{1}{4}$가 된다.

따라서, 점 M은 이차곡선 $y=x^2+\frac{1}{4}$위에 있다.

역으로, 이차곡선 $y=x^2+\frac{1}{4}$위의 한 점 $\left(a, a^2+\frac{1}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은 $y=2ax-a^2+\frac{1}{4}$

이고, 접선과 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점의 x좌표 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$는

$$x^2=y=2ax-a^2+\frac{1}{4}$$

의 해가 되어, $x_2-x_1=1$을 만족하게 된다. 즉, 문제에 주어진 선분 P_1P_2는 이차곡선

$y=x^2+\frac{1}{4}$의 접선의 일부이다.

$x_1=1$일 때, 직선 P_1P_2의 방정식은 $y=3x-2$이고 $M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$이므로, 도형의 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)dx+\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-x^2\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}(3x-2-x^2)dx=\frac{13}{24}$$

이다.

○ 채점기준

(5점) 점 M을 포함하는 함수를 구할 수 있다.

(5점) 접선의 방정식을 구할 수 있다.

(5점) 도형의 넓이를 구할 수 있다.

1398

성균관대학교

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY