KU 논술

2026학년도 KU모의논술
자연 문제 해설

1 출제 의도

[문제 1] 지수함수와 일반각에 대한 삼각함수의 정의와 기본 성질에 대한 이해도를 평가하며, 이를 이용해 부등식 문제를 해결할 수 있는지 알아본다.

[문제 2] 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구하고 삼각함수의 미분을 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 3] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용해 경우의 수를 계산하는 능력을 평가하고, 원순열의 개념에 대한 이해도를 구체적인 문제 상황을 통해 알아본다.

[문제 4] 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 표현하고 이를 미분할 수 있는지 알아본다. 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 삼각함수로 표현된 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판단할 수 있는지 알아본다.

2 문항 해설

[문제 1] 지수함수와 일반각에 대한 삼각함수의 정의와 기본 성질에 대한 이해도를 평가하며, 이를 이용해 부등식 문제를 해결할 수 있는지 알아본다.

[문제 2] 사인법칙을 이용하여 원에 내접하는 사각형의 변과 대각선의 길이를 구할수 있는지 평가하고 덧셈정리를 이용하여 삼각함수로 표현된 식을 간단히 할 수 있는지 평가하기 위한 문항이다. 또, 도함수를 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용해 경우의 수를 계산하는 능력을 평가하고, 원순열의 개념에 대한 이해도를 구체적인 문제 상황을 통해 알아본다.

[문제 4] 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 표현하고 이를 미분할 수 있는지 알아본다. 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 삼각함수로 표현된 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판단할 수 있는지 알아본다.

3 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1번	A+: 답과 풀이가 맞음 A: 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음 B+: B단계의 풀이로부터 $n=1, 13, 25,$ ... 또는 $n=5, 17, 29,$ ... 을 구함 B: 삼각함수의 값 $\sin\frac{n\pi}{6}=\frac{1}{2}$을 구하고, 이와 함께 n의 범위 $2^{10}<n<2^{12}$를 구함 C: 삼각함수의 값 $\sin\frac{n\pi}{6}=\frac{1}{2}$을 구하거나 또는 n의 범위 $2^{10}<n<2^{12}$를 구함 D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함 F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음	20점
문제 2번	A+: 답과 풀이가 모두 맞음 A: $f'(\theta)=0$을 만족하는 θ를 이용하여 $f(\theta)$의 최댓값을 구했으나 직선 OP의 방정식과 $f(\theta)$의 최댓값 중 하나를 잘못 구함 B+: $f(\theta)$와 $f'(\theta)$를 바르게 구함 B: $\overline{\mathrm{AP}}, \overline{\mathrm{BP}}, \overline{\mathrm{OP}}$를 모두 바르게 구함 C: $\angle \mathrm{BOP}$, $\angle \mathrm{OBA}$와 $\angle \mathrm{OAP}$(또는 $\angle \mathrm{OBP}$)를 구했으나 일부를 잘 못 구함 D: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함 F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음	23점
문제 3번	A+: 답과 풀이가 맞음 A: 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음 B+: 다섯 가지 유형 중 3개 이상을 맞게 계산함 B: 다섯 가지 유형 중 2개 이상을 맞게 계산함 C: 다섯 가지 유형으로 나누어 경우의 수를 구하고 더하는 방법을 제시함 D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함 F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음	27점
문제 4번	A+: 답과 풀이가 맞음 A: 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음 B+: $f'(t)$와 $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$를 바르게 구함 B: $f(t)$를 바르게 구함 C: 삼각형 APQ의 넓이 또는 부채꼴 POQ의 넓이를 바르게 계산함 D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함 F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음	30점

4 예시 답안

[문제 1] 정답: 512개

[풀이] $n \geq 1000$ 이므로 $\log_2 n > \log_2 512 = 9$ 이다. 따라서 $\log_2 n$은 양수이고 $5 < (\log_2 n)\sin\frac{n\pi}{6}$ 이므로 $\sin\frac{n\pi}{6}$ 도 양수이다.

또한 $\sin\frac{n\pi}{6} < \frac{6}{\log_2 n} < \frac{6}{9}$ 이고, $\sin\frac{n\pi}{6}$ 가 될 수 있는 양수 $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 중에서 이 부등식을 만족시키는 것은 $\frac{1}{2}$ 뿐이다.

따라서 $\sin\frac{n\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 이어야 한다.

이때 $5 < \log_2 n \times \frac{1}{2} < 6$ 으로부터 $2^{10} = 1024 < n < 2^{12} = 4096$ 을 얻는다.

$0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 이면 $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 이다.

따라서 $\sin\frac{n\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 인 자연수 n은 $n = 1, 13, 25, \ldots$ 또는 $n = 5, 17, 29, \ldots$ 이다.

이 중 $1024 < n < 4096$ 을 만족시키는 n은

$1033 = 12 \times 86 + 1, 1045 = 12 \times 87 + 1, \ldots, 4093 = 12 \times 341 + 1$ 의 256개와

$1025 = 12 \times 85 + 5, 1037 = 12 \times 86 + 5, \ldots, 4085 = 12 \times 340 + 5$ 의 256개이다.

따라서 답은 $256 + 256 = 512$ 개다.

[문제 2] 정답: $f(\theta) = 9\sin\theta + 8\cos\theta$, 직선 $y = \frac{9}{8}x$, $\sqrt{145}$

[풀이] $\angle\mathrm{OAB} = \alpha$ 라 하면 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ 이다. 점 O, A, P, B가 한 원 위에 있으므로

$$\angle\mathrm{BOP} = \angle\mathrm{BOA} - \angle\mathrm{AOP} = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

$$\angle\mathrm{OBA} = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\angle\mathrm{OAP} = \angle\mathrm{BAP} + \angle\mathrm{OAB} = \angle\mathrm{BOP} + \angle\mathrm{OAB} = \frac{\pi}{2} - \theta + \alpha.$$

삼각형 OAB의 외접원의 지름이 5이므로 사인정리를 적용하면

$$\overline{\mathrm{AP}} = 5\sin\theta,$$

$$\overline{\mathrm{BP}} = 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 5\cos\theta,$$

$$\overline{\mathrm{OP}} = 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right) = 5\cos(\theta - \alpha)$$

$$= 5\cos\theta\cos\alpha + 5\sin\theta\sin\alpha = 3\cos\theta + 4\sin\theta$$

세 선분 OP, AP, BP의 길이의 합이 $f(\theta)$ 이므로

$$f(\theta) = 5\sin\theta + 5\cos\theta + 3\cos\theta + 4\sin\theta = 9\sin\theta + 8\cos\theta,$$

$$f'(\theta) = 9\cos\theta - 8\sin\theta.$$

따라서 $\tan\theta_0 = \frac{9}{8}$ 인 θ_0 에서 $f(\theta)$ 가 최댓값 $\sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{145}$ 를 가진다.

한편, $\tan\theta_0 = \frac{9}{8}$ 일 때, 직선 OP의 방정식은 $y = \frac{9}{8}x$ 이다.

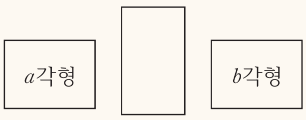
[문제 3] 정답: 20가지

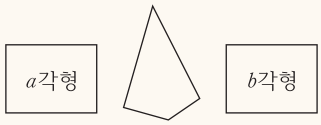
[풀이] 12를 3 이상의 자연수 3개의 합으로 쓰는 방법은 $3+3+6$, $3+4+5$, $4+4+4$, 이렇게 3가지이므로 (나)의 도형은 3각형 2개와 6각형 1개로 이루어지든지 3각형과 4각형과 5각형으로 이루어지든지 4각형 3개로 이루어져야 한다. 또한 이 다각형들은 (나)의 왼쪽 그림처럼 다각형 사이에 다른 다각형이 없는 경우와 오른쪽 그림처럼 다각형 사이에 다른 다각형이 끼인 경우가 있다. 사이에 끼인 다각형은 기껏해야 1개이다.

(1) 끼인 다각형이 없는 경우
4각형 3개로 도형을 만드는 방법이 1가지이다. 3각형 2개와 6각형 1개로 도형을 만드는 방법도 1가지이다. 3각형, 4각형, 5각형으로 도형을 만드는 방법은 시계방향 순서로 3각형, 4각형, 5각형이 나오는 경우와 3각형, 5각형, 4각형이 나오는 경우로 2가지이다.
따라서 모두 $1+1+2=4$가지가 있다.

(2) 끼인 다각형이 삼각형인 경우
끼인 삼각형의 세 꼭짓점 중에서 2개는 원 위에서 서로 이웃하고 나머지 하나는 떨어져 있어야 한다. 원을 회전하여 일치하는 도형은 같은 것으로 보기 때문에 이웃한 두 꼭짓점이 아래쪽에 있고 떨어져 있는 꼭짓점이 위쪽에 있다고 할 수 있다. 왼쪽에 a각형, 오른쪽에 b각형이 있다고 했을 때, (a,b)가 될 수 있는 순서쌍은 (3,6), (6,3), (4,5), (5,4) 이렇게 4개이다. 또한 이렇게 만들어진 도형들은 서로 다르다. 따라서 모두 4가지가 있다.

(3) 끼인 다각형이 사각형인 경우
왼쪽에 a각형, 오른쪽에 b각형이 오는 (a,b)의 순서쌍은 (3,5), (5,3), (4,4) 이렇게 3가지이다.
아래 왼쪽 그림처럼 사각형의 네 꼭짓점이 2개씩 원 위에서 서로 이웃할 때는 (a,b)의 순서쌍 (3,5)와 (5,3)은 같은 도형을 만들고 (4,4)는 새로운 도형을 만든다. 따라서 이 경우는 2가지가 있다.
아래 오른쪽 그림처럼 사각형의 네 꼭짓점 중 3개가 원 위에서 서로 이웃하고 1개는 떨어져 있으면 (a,b)의 순서쌍 (3,5), (5,3), (4,4)는 모두 서로 다른 도형을 만든다. 따라서 이 경우는 3가지가 있다.
따라서 끼인 다각형이 사각형인 경우는 모두 $2+3=5$가지가 있다.





(4) 끼인 다각형이 오각형인 경우
왼쪽에 a각형, 오른쪽에 b각형이 오는 (a,b)의 순서쌍은 (3,4), (4,3) 이렇게 2가지이다.
오각형의 5개의 꼭짓점 중에서 이웃한 꼭짓점의 개수는 1개와 4개이든지 2개와 3개이다.
각각의 경우 (a,b)의 순서쌍 (3,4)와 (4,3)은 서로 다른 도형을 만든다.
따라서 끼인 다각형이 오각형인 경우는 $2 \times 2 = 4$가지가 있다.

(5) 끼인 다각형이 육각형인 경우
왼쪽에 a각형, 오른쪽에 b각형이 오는 (a,b)의 순서쌍은 (3,3) 하나이다. 육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 이웃한 꼭짓점의 개수는 1개와 5개, 2개와 4개, 3개와 3개 이렇게 3가지 경우가 있다. 따라서 끼인 다각형이 육각형인 경우는 3가지가 있다.

(1), (2), (3), (4), (5)에 의하여 구하는 도형의 총 개수는 $4+4+5+4+3=20$이다.

[문제 4] 정답: (1) $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) 점 P와 점 Q의 x좌표는 각각 $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, $\frac{-7+\sqrt{17}}{16}$

[풀이]

(1) 선분 AP, 선분 AB, 호 PB로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 하자.
$S(t)$는 삼각형 AOP의 넓이와 부채꼴 POB의 넓이의 합이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin(\pi-2t)+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2t=t+\frac{1}{2}\sin 2t.$$

같은 이유로 선분 AQ, 선분 AB, 호 QB로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S(2t)$이다. 따라서

$$f(t)=S(2t)-S(t)=t+\frac{1}{2}(\sin 4t-\sin 2t)$$

$$f'(t)=1+\frac{1}{2}(4\cos 4t-2\cos 2t)=2\cos 4t-\cos 2t+1$$

코사인 함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos 4t=\cos(2t+2t)=\cos^2 2t-\sin^2 2t=\cos^2 2t-(1-\cos^2 2t)=2\cos^2 2t-1.$$

따라서

$$f'(t)=2(2\cos^2 2t-1)-\cos 2t+1=4\cos^2 2t-\cos 2t-1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=4\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}-1=4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $f'(t)=0$이면 $4\cos^2 2t-\cos 2t-1=0$이므로 $\cos 2t=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$이다.

$0<t<\frac{\pi}{4}$일 때 $\cos 2t>0$이므로 $\cos 2t=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$이다.

α를 $\cos 2\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$를 만족하는 값이라 하자. (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$) 그러면 $0<t<\alpha$일 때 $f'(t)<0$이므로

$t=\alpha$일 때 $f(t)$가 최대가 된다.

점 P의 x좌표는 $\cos 2\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$이다.

점 Q의 x좌표는 $\cos 4\alpha=2\cos^2(2\alpha)-1=\frac{-7+\sqrt{17}}{16}$이다.

5 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2017	26, 70, 92
	수학 I	황선욱 외	미래엔	2017	73
	미적분	박교식 외	동아출판	2020	65
	미적분	황선욱 외	미래엔	2017	67
	수학 II	류희찬 외	천재교과서	2020	83
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2018	12