# 2025학년도 KU모의논술 자연계 문제 해설

## 1 출제 의도

[문제 1] 집합과 차집합의 뜻을 알고 차집합의 원소의 개수를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2] 삼각함수를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 삼각함수의 덧셈정리를 이해하며, 이를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 3] 직선과 원의 방정식, 미분계수를 이해하고, 합성함수를 미분할 수 있는지 알아본다.

[문제 4] 좌표공간에서 도형의 정사영을 이해하고, 이를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

## 2 문항 해설

[문제 1] 집합과 차집합의 뜻을 알고 차집합의 원소의 개수를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2] 삼각함수를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 삼각함수의 덧셈정리를 이해하며, 이를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 3] 직선과 원의 방정식, 미분계수를 이해하고, 합성함수를 미분할 수 있는지 알아본다.

[문제 4] 좌표공간에서 도형의 정사영을 이해하고, 이를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

## 3 채점 기준

| 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| 1 | A+: 정답과 풀이가 맞음.<br>A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음.<br>B+: 채점 기준 C를 구하고, 2025 이하의 자연수 중 2025와 서로소인 수의 개수를 맞게 구함.<br>B: 채점 기준 C를 구하고, 2025 이하의 자연수 중 2025와 서로소인 수의 개수를 구하였으나 틀림.<br>C: $\frac{x}{2025+x}$ 와 $\frac{2025}{x+2025}$가 기약분수가 될 필요충분조건이 $x$와 2025가 서로소일 때임을 구함.<br>D: 집합 $A-B$의 원소가 $f(x)=\frac{x}{2025+x}$ 또는 $g(x)=\frac{2025}{x+2025}$ 꼴의 기약분수임을 구함.<br>E: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함.<br>F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음. | 15점 |

| 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| 2 | A+: 정답과 풀이가 맞음.<br>A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음.<br>B+: $S(\theta)=\dfrac{-1}{\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$<br>B: 채점 기준 C를 구하고, $S(\theta)$를 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 정리하였으나 틀림.<br>C: $S(\theta)=\dfrac{-1}{2\cos\theta\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}$를 구함.<br>D: $\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta=1$ 또는 $\overline{\mathrm{AC}}\cos\left(\pi-\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=2$를 구함.<br>E: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함.<br>F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음. | 30점 |
| 3 | A+: 정답과 풀이가 맞음.<br>A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음.<br>B+: $2\cos\theta\times\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{-3t+1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$를 구함.<br>B: $2\sin\theta=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$의 양변을 $t$에 대해 미분하였으나 틀림.<br>C: $t$와 $\sin\theta$의 관계식 $2\sin\theta=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$을 구함.<br>D: 점 A와 직선 $l$사이의 거리 $\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$를 구함.<br>E: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함.<br>F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음. | 20점 |
| 4 | A+: 정답과 풀이가 맞음.<br>A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음.<br>B+: 도형 $F$의 평면 $\alpha$ 위로의 정사영의 넓이를 맞게 구함.<br>B: 채점 기준 C를 구하고, 도형 $F$의 평면 $\alpha$ 위로의 정사영의 넓이를 구하였으나 틀림.<br>C: 도형 $F$가 직사각형 ABCD를 회전하여 얻어지는 원기둥을 $xy$평면으로 잘라 얻어지는 단면임을 적음.<br>D: 삼각형 AOP의 넓이가 1이 되는 점 P를 하나 구함.<br>E: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함.<br>F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음. | 35점 |

※ 평가 등급 기준 및 배점은 실제 논술고사에서 일부 변경될 수 있음

## 4 예시 답안

**[문제 1] 정답:** 2160

**[풀이]** 집합 $A-B$의 원소는 $f(x)=\dfrac{x}{2025+x}$ 또는 $g(x)=\dfrac{2025}{x+2025}$ 꼴의 기약분수이다.

(단, $x$는 2025 이하의 자연수).

여기서 $f(x)$는 증가함수, $g(x)$는 감소함수이고, 따라서 일대일함수이다.

또한, $f(x)\le\dfrac{2025}{2025+2025}\le g(x)$ 이다.

$\dfrac{x}{2025+x}$ 가 기약분수가 될 필요충분조건은 $x$와 2025가 서로소일 때이다. 또한, $\dfrac{2025}{x+2025}$가 기약분수가 될 필요충분조건은 $x$와 2025가 서로소일 때이다.

2025 이하의 자연수 중 2025와 서로소인 수의 개수를 구하자. $2025=3^4\times5^2$이므로,

2025 이하의 3의 배수의 집합을 $C$, 5의 배수의 집합을 $D$라 할 때,

$$2025-(n(C)+n(D)-n(C\cap D))=2025-(675+405-135)=1080.$$

따라서 $f(x)$ 또는 $g(x)$ 꼴의 기약분수의 개수는 각각 1080개이며, 집합 $\mathrm{A}-\mathrm{B}$의 원소의 개수는 $1080\times 2=2160$개다.

**[문제 1의 별해1]** 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$는 $x\geq 0$에서 증가함수이므로 일대일함수이다. 임의의 자연수 $a, b$에 대하여

$f(\dfrac{b}{a})=\dfrac{b}{a+b}$ 이므로,

$S=\{x\,|\,x=\dfrac{b}{a},\ a$와 $b$는 2024 이하의 자연수$\}$,

$T=\{x\,|\,x=\dfrac{b}{a},\ a$와 $b$는 2025 이하의 자연수$\}$

에 대하여 집합 $A-B$의 원소의 개수는 집합 $T-S$의 원소의 개수와 같다. 차집합 $T-S$는 $a$ 또는 $b$가 2025인 기약분수들을 원소로 가지므로 위 풀이와 같이 계산하여 $2160$개를 얻는다.

**[문제 1의 별해2]** 주어진 식의 역수를 취하면 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a}{b}+1$이다. 따라서 $a$ 또는 $b$가 2025인 기약분수 $\dfrac{a}{b}$의 개수를 구하면 된다. 따라서 위와 같이 계산하여 $2160$개를 얻는다.

**[문제 2] 정답:** $4+2\sqrt{3}$

**[풀이]** 점 $\mathrm{D}(0,3)$이라 하자. 직각 삼각형 $\mathrm{AOB}$와 직각삼각형 $\mathrm{ACD}$에서

$\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta=1$, $\overline{\mathrm{AC}}\cos(\pi-(\theta+\dfrac{\pi}{6}))=2$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{AC}}=-\dfrac{2}{\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6})}$이다.

삼각형 $\mathrm{ABC}$의 넓이를 $S(\theta)$라 하면 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin\dfrac{\pi}{6}$이다. 따라서

$$S(\theta)=\frac{-1}{2\cos\theta\cos(\theta+\frac{\pi}{6})}.$$

$\cos(\theta+(\theta+\dfrac{\pi}{6}))=\cos\theta\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6})-\sin\theta\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})$이고,

$\cos(\theta-(\theta+\dfrac{\pi}{6}))=\cos\theta\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6})+\sin\theta\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})$이므로,

$2\cos\theta\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6})=\cos(\theta+(\theta+\dfrac{\pi}{6}))+\cos(\theta-(\theta+\dfrac{\pi}{6}))=\cos(2\theta+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서, $S(\theta)=\dfrac{-1}{\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 이다.

$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\dfrac{5\pi}{6}<2\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7}{6}\pi$이다. 따라서 $-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leq\cos(2\theta+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$이고,

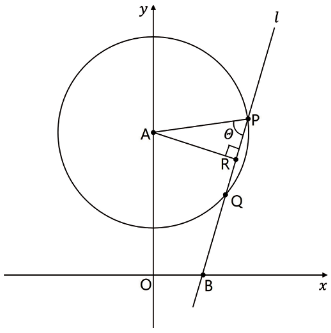
$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\pi$일 때, $S(\theta)$는 최솟값 $4+2\sqrt{3}$을 갖는다.

**[문제 3] 정답:** $-\dfrac{2}{5}$

**[풀이]** 직선 $l$의 방정식은 $y=t(x-1)$이다.

점 A와 직선 $l$ 사이의 거리는 $\dfrac{|t\times 0-3-t|}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

점 A에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 R이라 하자.




삼각형 ARP는 직각삼각형이고 $\overline{AP}=2$이므로 점 A와 직선 $l$ 사이의 거리는 $2\sin\theta$이다.

따라서 $2\sin\theta=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$이다.

양변을 $t$에 대해 미분하면,

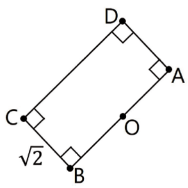
$2\cos\theta\times\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{t^2+1}\left(1\times\sqrt{t^2+1}-(t+3)\times\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\right)=\dfrac{-3t+1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$이다.

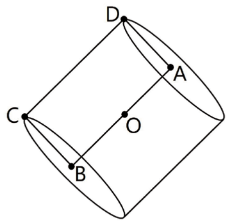
$t=3$일 때, $\sin\theta=\dfrac{3+3}{2\sqrt{3^2+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$이고, 이 때 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$이다.

따라서, $f'(3)=\dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}}\times\left(\dfrac{(-3)\times3+1}{(3^2+1)\times\sqrt{3^2+1}}\right)=-\dfrac{2}{5}$이다.

**[문제 4] 정답:** (1) $2\pi$, (2) $2\sqrt{2}\,\pi$

[풀이] (1) 점 P를 지나고 직선 OA에 평행한 직선을 $l$이라 하자. 원점 O에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 AOP의 넓이는 직각삼각형 AOH의 넓이와 같다. $\overline{OA}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 AOH의 넓이가 1보다 작거나 같기 위한 필요충분조건은 $\overline{OH}\le\sqrt{2}$ 이다. ——— (*)




좌표가 $(0,-1,-1)$, $(0,-2,0)$, $(0,0,2)$인 점을 각각 B, C, D라 하자. 왼쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD를 선분 AB 주위로 회전하여 얻어지는 원기둥을 생각하자. 이 원기둥의 윗면의 반지름은 $\overline{AD}=\sqrt{2}$이다.

(*)에 의해 도형 $F$는 이 원기둥을 $xy$ 평면으로 잘라 얻어지는 단면이다. 또한, 원기둥의 윗면을 포함하는 평면이 $\alpha$이다. 따라서 도형 $F$의 평면 $\alpha$ 위로의 정사영은 이 원기둥의 윗면이고, 그 넓이는 $\pi\times(\sqrt{2})^2=2\pi$이다.

(2) 도형 $F$와 원기둥의 윗면은 각각 $xy$ 평면과 평면 $\alpha$ 위에 있고, $xy$ 평면과 평면 $\alpha$ 가 이루는 이면각의 크기는 직선 OA와 $z$축이 이루는 예각의 크기와 같다. 이 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$ 이다.

따라서 도형 $F$의 넓이는

$$(\text{원기둥의 윗면의 넓이})\times\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=2\pi\times\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}\,\pi.$$

## 5 자료 출처

| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 | 관련 자료 | 재구성 여부 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 수학 | 황선욱 외 8인 | 미래엔 | 2018 | 177, 181, 185 | | |
| 미적분 | 이준열 외 9인 | 천재교육 | 2018 | 69 | | |
| 수학Ⅱ | 고성은 외 5인 | 좋은책 신사고 | 2019 | 56 | | |
| 기하 | 김원경 외 14인 | 비상교육 | 2019 | 118 | | |
| 미적분 | 고성은 외 5인 | 좋은책 신사고 | 2019 | 62, 71, 81 | | |
| 수학Ⅱ | 박교식 외 19인 | 동아출판 | 2019 | 55 | | |