3. 출제 의도

[문제1] 좌표평면을 움직이는 점에 대하여 선분의 길이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 알아본다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 이면각과 삼수선의 정리를 이해하고 이를 이용하여 두 평면이 이루는 각 θ에 대해 $\cos\theta$를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 삼각함수의 미분과 합성함수의 미분을 이용하여, 각의 변화에 대한 길이의 변화율을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제4] 곡선 사이의 넓이를 적분을 이용하여 구할 수 있는지 알아본다. 합성함수를 미분할 수 있는지 알아본다. 삼각함수를 미분할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 1	수학I - (2) 삼각함수 1 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문제 2	기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - 1 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문제 3	미적분-(2) 미분법 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. 미적분-(2) 미분법 2 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
문제 4	수학1 - (2) 삼각함수 1 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02]삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 2 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 2 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2020	62
	미적분	이준열 외	천재교육	2020	89
	수학II	박교식 외	동아출판	2020	139
	기하	고성은 외	좋은책신사고	2020	113
기타					

5. 문항 해설

[문제1] 좌표평면을 움직이는 점에 대하여 선분의 길이를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 알아본다. 삼각함수 및 삼각함수의 덧셈정리를 이용할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 이면각과 삼수선의 정리를 이해하고 이를 이용하여 두 평면이 이루는 각 θ에 대해 $\cos\theta$를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 네 변의 길이가 정해진 사각형의 대각선의 길이와 각의 관계를 이용하여 각의 변화에 대한 대각선 길이의 변화율을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제4] 제시된 조건으로부터 곡선 사이의 넓이를 정적분으로 표현할 수 있는지 알아본다. 삼각함수 미분 및 합성함수 미분을 활용하여 주어진 식을 미분을 할 수 있는지 알아본다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1번	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $\cos t = u$라 두고 풀어 부등식 $u < \frac{1}{2}$ 또는 접하는 경우의 방정식 $u = \frac{1}{2}$을 얻음. B: 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 부등식 $2\cos^2 t + 7\cos t - 1 < 3$ 또는 방정식 $2\cos^2 t + 7\cos t - 1 = 3$ 을 얻음. C: 문제의 풀이를 위해 부등식 $\overline{AB}^2 + 3^2 > \overline{OB}^2$또는 방정식 $\overline{AB}^2 + 3^2 = \overline{OB}^2$을 t에 대한 식으로 적음. D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20점
2번	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 선분 PQ와 선분 AB가 수직일 때 최대임을 적고 $\overline{\mathrm{EG}}$와 $\overline{\mathrm{FG}}$를 구함 B+: 선분 PQ와 선분 AB가 수직일 때 최대임을 적고, $\overline{\mathrm{EG}}$ 또는 $\overline{\mathrm{FG}}$를 구함 B: 선분 PQ와 선분 AB가 수직일 때 최대임을 적음, C: $\overline{\mathrm{EG}}$ 또는 $\overline{\mathrm{FG}}$를 구함. D: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	23점
3번	A+: 답과 풀이가 맞음. A: $\angle ABC$를 ϕ라고 하고 $\phi'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$을 구한 경우 B+: 식 (1)과 함께 (2)를 구한 경우 B: 식 (1)을 구한 경우 C: $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 각 변의 길이와 각을 구한 경우 D: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	27점
4번	A+: 답과 풀이가 맞음. A: a와 b에 대한 관계식 (*)와 (**)를 모두 구함. B+: a와 b에 대한 관계식 (*)와 (**) 중 하나를 구함. C: 문제 (1)의 답이 맞음. $(f'(\theta) = \frac{dt}{d\theta} = \frac{(10-t^2)^2 + t^2}{2})$ D: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30점

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1] **(답)** $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$

(풀이) 문제의 조건을 만족시키기 위해서는 각 OAB가 예각이 되어야 하므로

$$\overline{\mathrm{AB}}^{\,2} + 3^2 > \overline{\mathrm{OB}}^{\,2}$$

에 해당한다. 이 식에 좌표를 대입하여 쓰면

$$\{3\cos t - (7 + \cos 3t)\}^2 + (3\sin t - \sin 3t)^2 + 9 > (7 + \cos 3t)^2 + (\sin 3t)^2$$

이 식을 정리하면, $7\cos t + \cos t \cos 3t + \sin t \sin 3t < 3$ 이고, 이 부등식의 좌변은
코사인함수의 덧셈정리에 의하여 $7\cos t + \cos 2t$와 같으며,

$$\cos 2t = \cos(t+t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$$

이므로 $7\cos t + \cos 2t = 2\cos^2 t + 7\cos t - 1$ 이다.

부등식 $2\cos^2 t + 7\cos t - 1 < 3$으로부터 $(2\cos t - 1)(\cos t + 4) < 0$을 얻는다.

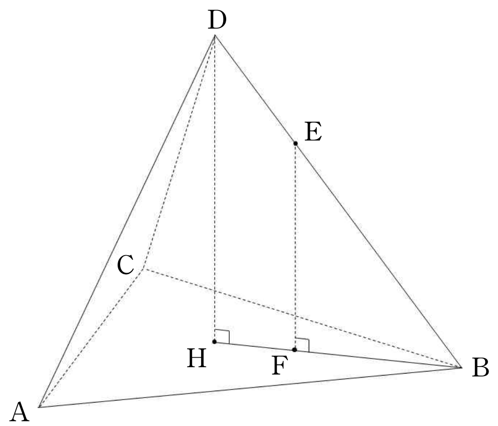
따라서 $\cos t < \frac{1}{2}$이고, t의 범위는 $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$이다.

[문제 2] **(답)** $\frac{\sqrt{15}}{5}$

(풀이) 삼각형 PDE의 넓이는 삼각형 PDB의 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로

사면체 DEPQ의 부피는 사면체 BDPQ의 부피의 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 사면체 DEPQ의 부피가 최대이기 위해서는 사면체 BDPQ의 부피가 최대이어야 한다.



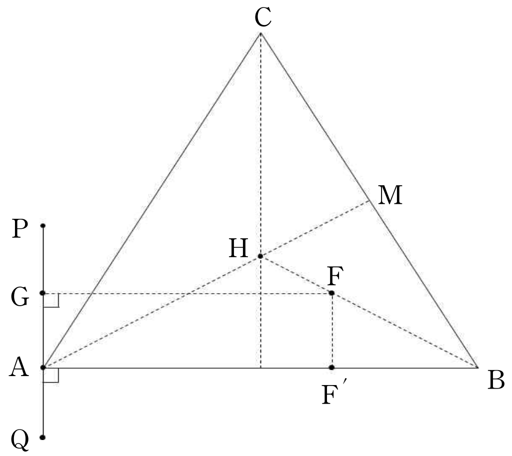
점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

사면체 BDPQ의 부피는 $\frac{1}{3} \times$(삼각형 BPQ의 넓이) $\times \overline{\mathrm{DH}}$이므로

삼각형 BPQ의 넓이가 최대이어야 한다.

이때는 선분 PQ와 선분 AB가 수직일 때이다.



선분 PQ와 선분 AB가 수직이라고 하자. 점 E에서
평면 ABC에 내린 수선의 발을 F, 점 F에서
직선 PQ에 내린 수선의 발을 G라 하면,
삼수선의 정리에 의해 직선 EG와 직선 PQ는 수직으로 만난다.

직각삼각형 EFG에서 θ는 각 EGF의 크기와 같으므로 $\cos\theta = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{EG}}$ 이다.

$\overline{FG}$를 구하자. 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을

F′이라 하면 $\overline{FG} = \overline{AF'} = \overline{AB} - \overline{BF'} = 6 - 3 \times \dfrac{2}{3} = 4$이다.

$\overline{DH}$와 $\overline{EF}$를 구하자. 삼각형 AHD는 직각삼각형이고 $\overline{AD} = 6$이다,
선분 BC의 중점을 M이라고 하면 선분 AM은

점 H를 지나고 $\overline{AH} = \dfrac{2}{3} \times \overline{AM} = \dfrac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $\overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{36-12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 이고,

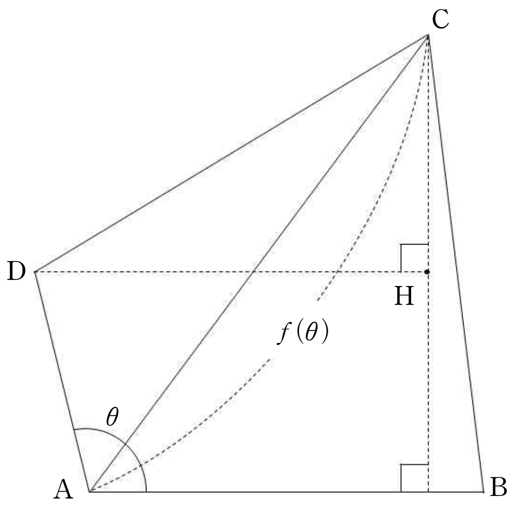
$\overline{EF} = \dfrac{2}{3} \times \overline{DH} = \dfrac{2}{3} \times 2\sqrt{6} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ 이다.

$\overline{EG}$를 구하자, 직각삼각형 EFG에서 $\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{\dfrac{32}{3} + 16} = \sqrt{\dfrac{80}{3}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{3}$.

따라서 $\cos\theta = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{EG}} = \dfrac{4}{\dfrac{4\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{15} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 이다.

[문제 3] **(답)** $f'(\theta) = -\frac{\sqrt{21}}{7}$

(풀이)



$\angle$ABC를 ϕ라고 하자. 그림의 직각삼각형 CDH에서

$\overline{\mathrm{DH}} = |\sqrt{3} - \cos\theta - 2\cos\phi|$, $\overline{\mathrm{CH}} = |2\sin\phi - \sin\theta|$이므로

(1) $$4 = (\sqrt{3} - \cos\theta - 2\cos\phi)^2 + (2\sin\phi - \sin\theta)^2$$

ϕ를 θ의 함수로 보고 θ에 대해 미분하면

(2) $$0 = (\sqrt{3} - \cos\theta - 2\cos\phi)(\sin\theta + 2\phi'\sin\phi) + (2\sin\phi - \sin\theta)(2\phi'\cos\phi - \cos\theta)$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$이면 $\phi = \frac{\pi}{2}$, $f(\theta) = \sqrt{7}$이고 식 (2)는 $0 = \sqrt{3}(1 + 2\phi'(\frac{\pi}{2}))$이 된다.

따라서, $\phi'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$.

코사인법칙에 따라 $f(\theta)^2 = 4 + 3 - 4\sqrt{3}\cos\phi$.

이 식을 θ에 대해 미분하면 $2f(\theta)f'(\theta) = 4\sqrt{3}\phi'(\theta)\sin\phi$.

$\theta = \frac{\pi}{2}$일때 $f'(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$.

[문제 4] **(답)** (1) $f'(\theta)=\dfrac{(10-t^2)^2+t^2}{2}$ (2) $a^2+b^2=19$, $ab=9$, $g(\theta)=\dfrac{29}{3}$

(풀이)

(1) A에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

사다리꼴 OPAQ의 넓이 $\dfrac{t}{2}(10+t^2)$에서 x축과 곡선 사이의 넓이를 뺀 값이

$f(\theta)$이다. 따라서

$$f(\theta)=\frac{t}{2}(10+t^2)-\int_0^t x^2dx=\frac{1}{6}t^3+5t.$$

A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 APH에서 $\tan\theta=\dfrac{t}{10-t^2}$이다.

t가 θ의 함수이므로, 양변을 θ에 대하여

미분하면 $\sec^2\theta=\dfrac{10+t^2}{(10-t^2)^2}\dfrac{dt}{d\theta}$이다.

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{t}{10-t^2}\right)^2=\dfrac{(10-t^2)^2+t^2}{(10-t^2)^2}$이므로

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{(10-t^2)^2+t^2}{10+t^2},\qquad f'(\theta)=\left(\frac{1}{2}t^2+5\right)\frac{dt}{d\theta}=\frac{(10-t^2)^2+t^2}{2}.$$

(2) $f'(\theta)=\dfrac{(10-a^2)^2+a^2}{2}$이고 같은 방법으로 $f'\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{(10-b^2)^2+b^2}{2}$이다.

$g'(\theta)=0$일 때 $f'(\theta)=f'\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로 다음이 성립한다.

(*) $$\frac{(10-b^2)^2+b^2}{2}=\frac{(10-a^2)^2+a^2}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned}\{a^2+(a^2-10)^2\}-\{b^2+(b^2-10)^2\}&=a^2-b^2+(a^2-10)^2-(b^2-10)^2\\&=(a^2-b^2)+(a^2-b^2)(a^2+b^2-20)=(a^2-b^2)(a^2+b^2-19)=0\end{aligned}$$

$a^2\neq b^2$이어야 하므로 $a^2+b^2=19$를 얻는다.

또한 $\overline{\mathrm{AP}}$와 $\overline{\mathrm{BP}}$가 수직이므로

(**) $\dfrac{a^2-10}{a}\cdot\dfrac{b^2-10}{b}=-1$이고 $(a^2-10)(b^2-10)+ab=0$.

$$\begin{aligned}(a^2-10)(b^2-10)+ab&=a^2b^2-10(a^2+b^2)+100+ab\\&=(ab)^2-10\cdot 19+100+ab=(ab)^2+ab-90=(ab-9)(ab+10)\end{aligned}$$

이로부터 $ab=9$를 얻는다. $a^2+b^2=19$와 $ab=9$을

연립하여 풀면 $a+b=\sqrt{37}$이고,

$$a = \frac{\sqrt{37}-1}{2}, \qquad b = \frac{\sqrt{37}+1}{2}.$$

이때 $b-a=1$이고 $b^3-a^3=(b-a)(b^2+ba+a^2)=19+9=28$이다.
이때 $g(\theta)$의 값은

$$g(\theta) = \left(\frac{1}{6}b^3+5b\right)-\left(\frac{1}{6}a^3+5a\right)=\frac{1}{6}(b^3-a^3)+5(b-a)=\frac{28}{6}+5=\frac{29}{3}.$$