▶ 문항카드 4

◎ 자연계 B

[건국대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	KU논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계B(수학) / 문제 1, 2, 3, 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	중복조합, 극값, 함수의 증가감소, 코사인법칙, 미분계수,이차방정식의 근과 계수의 관계
예상 소요 시간	100분	

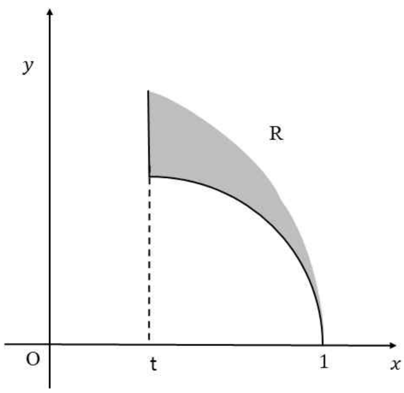
2. 문항 및 제시문

제시문 1

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖고 a를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이 성립한다.

(나) 그림에서 색칠된 도형 R는 제 1사분면에 있고 다음 곡선들로 둘러싸여 있다.

$$x=t, \quad x^2+y^2=1, \quad (x-t)^2+y^2=(1-t)^2$$



[문제 1] (나)에서 $t=\frac{1}{2}$일 때의 도형 R의 넓이를 구하고, 도형 R의 넓이가 최대가 될 때의 t의 값을 구하시오. 풀이 과정도 쓰시오. [15점]

제시문 2

(가) n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\times q!\times\cdots\times r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

(나) [조건 1] 또는 [조건 2]를 만족하도록 문자 A 3개, B 5개, C 3개로 이루어진 11개의 문자 A, A, A, B, B, B, B, B, C, C, C를 왼쪽부터 일렬로 나열하자.

[조건 1] 문자 C 바로 다음에는 항상 문자 B가 이웃하여 나온다.
예를 들어, ACBBCBCBABA는 [조건 1]을 만족하고, ACBBCBCABBA는 [조건 1]을 만족하지 않는다.

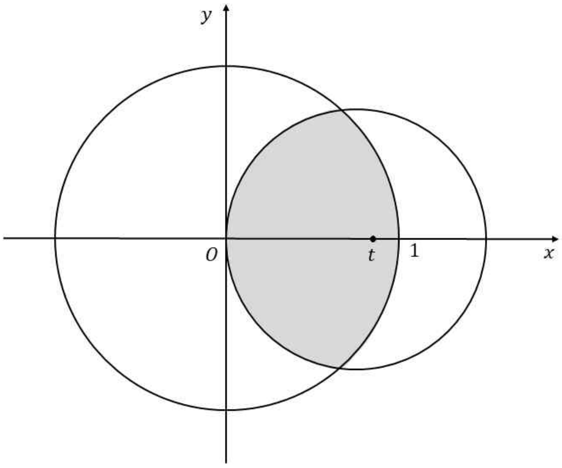
[조건 2] 문자 A 바로 다음에는 문자 B가 이웃하여 나오지 않는다.
예를 들어, BACBACBBCBA는 [조건 2]를 만족하고, BACBACABBCB는 [조건 2]를 만족하지 않는다.

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. [20점]
(1) (나)에서 [조건 1]을 만족하도록 나열하는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.
(2) (나)에서 [조건 2]를 만족하도록 나열하는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

제시문 3

(가) 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

나) 그림에서 한 원은 중심이 원점이고 반지름이 1이며, 다른 원은 중심이 점 $(t,0)$이고 반지름이 t이다. 두 원의 내부의 공통 부분의 넓이가 $S(t)$이다.

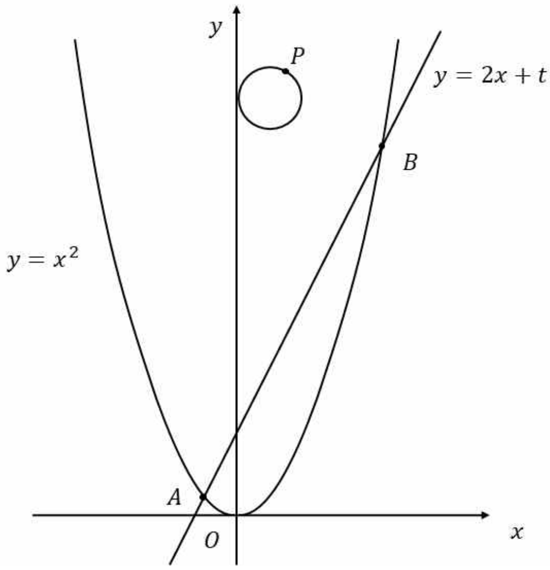


[문제 3] (나)에서 $t=1$에서의 미분계수 $S'(1)$의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [30점]

제시문 4

(가) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$

(나) 그림에서 점 P는 중심이 점 $(1, 8)$이고 반지름이 1인 원 위에 있다. 점 A와 점 B는 포물선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+t$의 교점으로 점 A는 제 2사분면에 점 B는 제 1사분면에 있다. (t는 양의 실수)



[문제 4] (나)에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 A의 좌표를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [35점]

3. 출제 의도

[문제1] 주어진 상황을 함수로 표현하고, 극값을 활용하여 최댓값을 찾을 수 있는지 알아본다.
[문제2] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있는지 알아본다.
[문제3] 각의 크기가 변하는 상황을 함수로 표현하고, 합성함수의 미분을 활용할 수 있는지 알아본다.
[문제4] 직선과 포물선의 교점과 근과 계수와의 관계를 활용할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 【별책 8】 “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1	수학I-(2)삼각함수 [1] 삼각함수 [12수학I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. 수학II - (2) 미분 [3] 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분- (2) 미적분 [2] 여러 가지 미분법 [12미적02-07]
2	수학-(5)확률과 통계 [1] 경우의 수 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. 확률과통계 - (1) 경우의 수 [1] 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
3	수학I - (2) 기하 [3] 원의 방정식 [10수학02-06] 수학II - (2) 미분 [3] 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 -(2) 미적분 [2] 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
4	수학 - (2) 기하 [3] 원의 방정식 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선사이의 거리를 구할 수 있다. 수학- (1) 문자와 식 [4] 복소수와 이차방정식 [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	고성은 외	좋은책신사고	2018	84
	확률과 통계	윤갑진 외	미래앤	2018	15
	수학I	박교식 외	동아출판	2018	66
	수학II	윤갑진 외	미래앤	2018	37
	수학I	류희찬 외	천재교과서	2018	75
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	61
	미적분	이준열	천재교육	2018	88

5. 문항 해설

[문제1] 주어진 상황을 함수로 표현하고, 극값을 활용하여 최댓값을 찾을 수 있는지 알아본다.
[문제2] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있는지 알아본다.
[문제3] 각의 크기가 변하는 상황을 함수로 표현하고, 합성함수의 미분을 활용할 수 있는지 알아본다.
[문제4] 직선과 포물선의 교점과 근과 계수와의 관계를 활용할 수 있는지 알아본다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 극값 구함 B: $f(t)$ 와 미분을 맞게 구함 C: $f(t)$를 맞게 구함. D: $t=\dfrac{1}{2}$ 일 때 R을 구함. E: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	15점
2	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $x_1+x_2+x_3+x_4=5$와 같이 B의 위치에 대한 경우의 수를 중복조합으로 표현함. B: (1)의 답과 풀이가 맞고 1단계를 구함. C: (1)의 답과 풀이가 맞게 구함 D: (1)의 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음 E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20점
3	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $t=1$일 때 $\dfrac{d\alpha}{dt}$가 맞음. B: $S'(t)$를 맞음. C: $S(t)=2(S_1+S_2-S_3)$를 구함. D: $S(t)$를 구하는 식이 맞았으나 사소한 실수가 있음. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30점
4	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $(1,7)$ 또는 $(1,9)$를 구하거나 $x=1$ 위에 P가 있음을 구함 B: $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$를 맞게 구함	35점

	C: $\overline{\mathrm{AP}}^{\,2}+\overline{\mathrm{BP}}^{\,2}$를 구하였으나 사소한 실수가 있음. D: 근과 계수를 언급 E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	

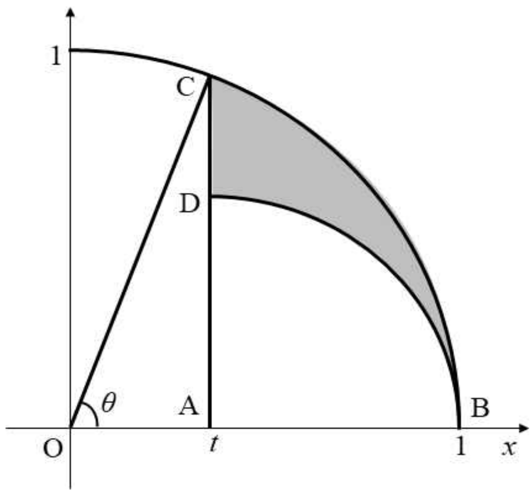
7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1번]

답 : $t=\dfrac{1}{2}$일 때의 R의 넓이는 $\dfrac{5\pi}{48}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$이고,

R의 넓이가 최대가 될 때의 t의 값은 $\dfrac{\pi^2-4}{\pi^2+4}$이다.

[풀이]



A$(t,0)$, B$(1,0)$이라 하고 $x=t$가 큰 원 및 작은 원과 만나는 점을 각각 C,D라 하자.
각 AOC의 크기를 θ라 하자. 도형 R의 넓이를 $f(t)$라 하자.

R의 넓이를 적분으로 표현하면

$$f(t)=\int_t^1\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{\pi}{4}(1-t)^2 = -\int_1^t\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{\pi}{4}(1-t)^2 \quad (1)$$

$x=\cos\theta$로 치환하여 적분을 풀어서 $f(t)=\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}-\dfrac{\pi}{4}(1-t)^2$를 얻는다.

$t=\dfrac{1}{2}$일 때, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\frac{1}{4} = \frac{5\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$일 때 R의 넓이는 $\frac{5\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{8}$이다.

(1)을 미분하여 $f'(t) = -\sqrt{1-t^2} + \frac{\pi}{2}(1-t)$.

$f'(t) = 0$으로부터 $\sqrt{1-t^2} = \frac{\pi}{2}(1-t)$

양변을 제곱하여 얻은 $1+t = \frac{\pi^2}{4}(1-t)$을 풀면 $t = \frac{\pi^2-4}{\pi^2+4}$에서 극값을 가진다.

$0 \le t \le \frac{\pi^2-4}{\pi^2+4}$ 일 때 $f'(t) \ge 0$이므로 $f(t)$는 증가

$\frac{\pi^2-4}{\pi^2+4} \le t \le 1$일 때 $f'(t) \le 0$이므로 $f(t)$는 감소

그러므로 $t = \frac{\pi^2-4}{\pi^2+4}$에서 R의 넓이가 최대가 된다.

[문제 2번] 답 : (1) 560, (2) 1120

[풀이]

(1) CB를 하나의 문자로 취급하면, A 3개, (CB) 3개, B 2개로 총 8개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{8!}{3!3!2!} = 560$이다.

(2)

1단계: A 3개와 C 3개를 일렬로 나열한 다음, 조건2를 만족하도록 B를 배치할 위치를 결정하면 된다.

먼저 $\boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{A}\ \boxed{C}\ \boxed{C}\ \boxed{A}$ 처럼 A 3개와 C 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{6!}{3!3!}$이다.

2단계:

이제, 아래와 같은 7개의 * 위치에 조건을 만족하도록 5개의 B의 위치를 결정해야 한다.

$$*\boxed{A}*\boxed{C}*\boxed{A}*\boxed{C}*\boxed{C}*\boxed{A}*$$

7개의 *가 표시된 자리 중, A 바로 다음 자리 3자리는 제외하고 남은 4개의 * 자리에 B 5개를 배치한다.

$$*\boxed{A}\ \boxed{C}*\boxed{A}\ \boxed{C}*\boxed{C}*\boxed{A}$$

첫 번째 * 자리에 들어가는 B의 개수를 x_1,

두 번째 * 자리에 들어가는 B의 개수를 x_2,

세 번째 * 자리에 들어가는 B의 개수를 x_3,

네 번째 * 자리에 들어가는 B의 개수를 x_4

라고 할 때 B의 개수가 5개이므로 다음 방정식을 만족한다.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=5,\ x_i\ \geq 0\ \ (i=1,2,3,4)$$

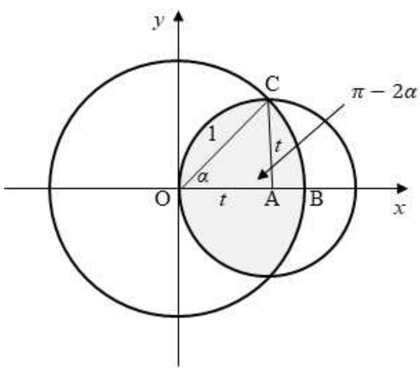
따라서 방정식의 음이 아닌 정수 해의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5$이므로 조건을 만족하는 방법의 수는

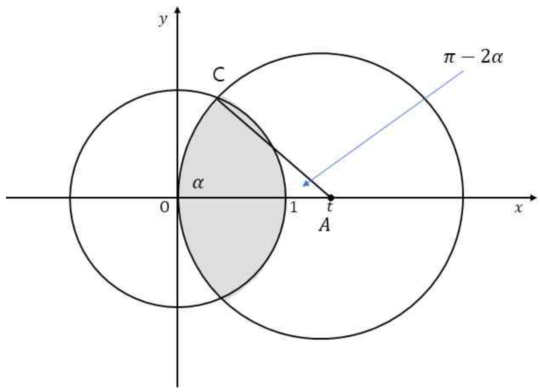
$$\frac{6!}{3!3!}\times{}_8\mathrm{C}_5=\frac{6!}{3!3!}\times\frac{8!}{3!5!}=1120$$

이다.

[문제 3번] 답 : $S'(1)=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$

[풀이]





$\mathrm{A}(t,0)$, $\mathrm{B}(1,0)$이라 하고 두 원의 교점을 C라 하자.

$\angle\mathrm{AOC}=\alpha$라 하면 $\angle\mathrm{OAC}=\pi-2\alpha$이다.

($0<t\leq 1$일 때는 왼쪽 그림, $t\geq 1$일 때는 오른쪽 그림 참조)

중심이 O이고 반지름이 1인 부채꼴 OBC의 넓이를 S_1이라 하고,

중심이 A이고 반지름이 t인 부채꼴 AOC의 넓이를 S_2라 하고,

삼각형 OAC의 넓이를 S_3라 하면,

$$S(t)=2(S_1+S_2-S_3)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}t^2(\pi-2\alpha)-\frac{1}{2}t\sin\alpha\right)=\alpha+t^2(\pi-2\alpha)-t\sin\alpha$$

$$S'(t)=\frac{d\alpha}{dt}+2t(\pi-2\alpha)+t^2\left(-2\frac{d\alpha}{dt}\right)-\sin\alpha-t\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

삼각형 OAC에서 코사인법칙을 적용하면 $\cos\alpha=\frac{1+t^2-t^2}{2\cdot 1\cdot t}=\frac{1}{2t}$

양변을 미분하면 $-\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{1}{2t^2}$

$t=1$일 때, 삼각형 OAC는 정삼각형이므로 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} S'(1) &= \frac{1}{\sqrt{3}}+2\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)-2\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3}\pi-\sqrt{3} \end{aligned}$$

[문제 4번]

답 : $A\left(\dfrac{2-\sqrt{14}}{2}, \dfrac{9-2\sqrt{14}}{2}\right)$

[풀이]

좌표를 $A(a,a^2)$, $B(b,b^2)$, $P(x,y)$라 하자.

a와 b는 $x^2=2x+t$ 즉 $x^2-2x-t=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에서 다음이 성립한다.

$$a+b=2$$
$$ab=-t$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4+2t=2(t+2)$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=4(t+2)^2-2t^2=2t^2+16t+16$$

이를 이용하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 계산하면 다음을 얻을 수 있다,

$$\begin{aligned} &\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 \\ &=(x-a)^2+(y-a^2)^2+(x-b)^2+(y-b^2)^2 \\ &=2x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2)+2y^2-2(a^2+b^2)y+(a^4+b^4) \\ &=2x^2-4x+2(t+2)+2y^2-4(t+2)y+(2t^2+16t+16) \\ &=2x^2-4x+2+2y^2-4(t+2)y+2(t+2)^2+2(t+1)+(8t+8) \\ &=2(x-1)^2+2(y-t-2)^2+10(t+1) \end{aligned}$$

$M(1,t+2)$에 대하여 $\overline{MP}^2=(x-1)^2+(y-t-2)^2$이므로

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{MP}^2+10(t+1).$$

또한 $\overline{MP}$는 M에서 원 $(x-1)^2+(y-8)^2=1$ 위의 점 P에 이르는 거리이다.

그런데 점 $M(1,t+2)$와 원의 중심이 모두 $x=1$ 위에 있으므로

M에 가장 가까운 원 위의 점은 $t+2\le 8$일 때는 $P(1,7)$이고,

$t+2\ge 8$일 때는 $P(1,9)$이다.

이때 $\overline{MP}=\begin{cases} 0<t\le 6\text{일 때}, & |(t+2)-7|=|t-5| \\ t\ge 6\text{일 때}, & |(t+2)-9|=|t-7| \end{cases}$

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{MP}^2+10(t+1)$로부터

$0<t\le 6$일 때,

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(t-5)^2+10(t+1)=2t^2-10t+60=2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+60-\frac{25}{2}$$

$t\ge 6$일 때,

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(t-7)^2+10(t+1)=2t^2-18t+108=2\left(t-\frac{9}{2}\right)^2+108-\frac{81}{2}$$

따라서 $t=\dfrac{5}{2}$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이 최소가 된다.

이때 A의 좌표는 $x^2-2x-\frac{5}{2}=0$으로 부터 $x=\frac{2\pm\sqrt{14}}{2}$, $y=2x+\frac{5}{2}=\frac{9\pm2\sqrt{14}}{2}$이다.

점 A는 제 2사분면의 점이므로 $\left(\frac{2-\sqrt{14}}{2}, \frac{9-2\sqrt{14}}{2}\right)$이다.