▶ 문항카드 3

◎ 자연계 A

[건국대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	KU논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계A(수학) / 문제 1, 2, 3, 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	미분, 적분, 곡선의 길이, 곡선 사이의 넓이, 삼각함수, 코사인법칙, 순열
예상 소요 시간	100분	

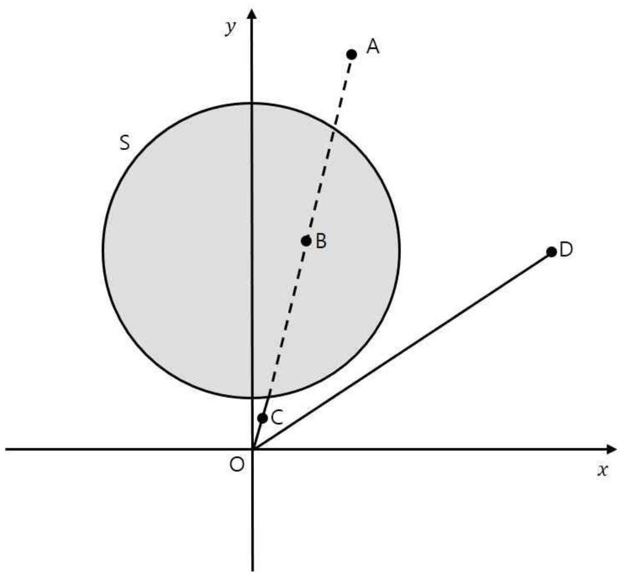
2. 문항 및 제시문

제시문 1

(가) $x=a$에서 $x=b$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(나) 그림에서 S는 중심이 점 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)$이고 반지름이 1인 원이다. 원점에서 바라볼 때 점 A, B는 원 S에 가려져서 보이지 않고 점 C, D는 보인다.



[문제 1] (나)에서 원점에서 제 1사분면의 곡선 $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}$ 위에 있는 점들을 바라볼 때, 원 S에 의해서 가려지지 않고 보이는 점들로 이루어진 곡선 $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}$ 의 부분의 길이를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [15점]

제시문 2

(가) n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\times q!\times\cdots\times r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

(나) [조건 1] 또는 [조건 2]를 만족하도록 문자 A 3개, B 4개, C 3개, D 2개로 이루어진 12개의 문자 A, A, A, B, B, B, B, C, C, C, D, D를 왼쪽부터 일렬로 나열하자.

[조건 1] 문자 D는 연속하여 나오지 않는다. 예를 들어, ABBCADABBCCD는 [조건 1]을 만족하고, ABBCADDABBCC는 [조건 1]을 만족하지 않는다.

[조건 2] 처음 나오는 문자 A가 처음 나오는 문자 B보다 먼저 나온다. 예를 들어, CDACBBBBAACD는 [조건 2]를 만족하고, CDBAAABBBCDC는 [조건 2]를 만족하지 않는다.

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. [20점]
(1) (나)에서 [조건 1]을 만족하도록 나열하는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.
(2) (나)에서 [조건 2]를 만족하도록 나열하는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

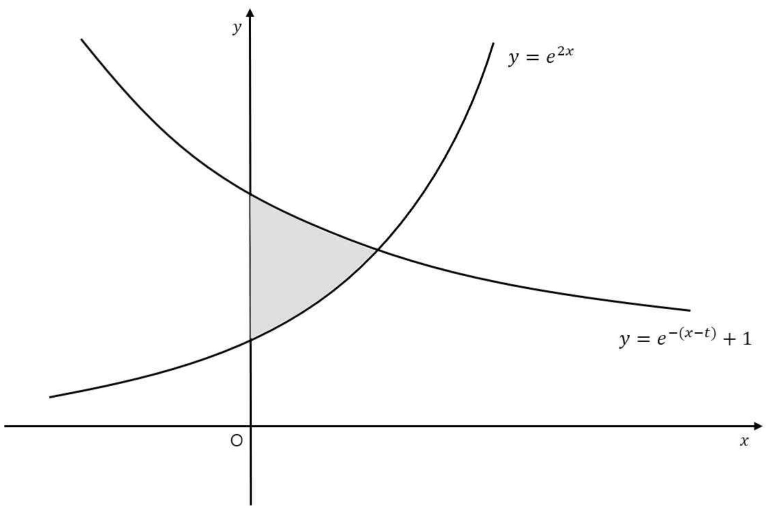
제시문 3

(가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$\mathrm{S}=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

이다.

(나) 그림에서 색칠된 도형은 두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=e^{-(x-t)}+1$과 y축으로 둘러싸인 도형이고, $S(t)$는 이 도형의 넓이이다. (t는 양의 실수)

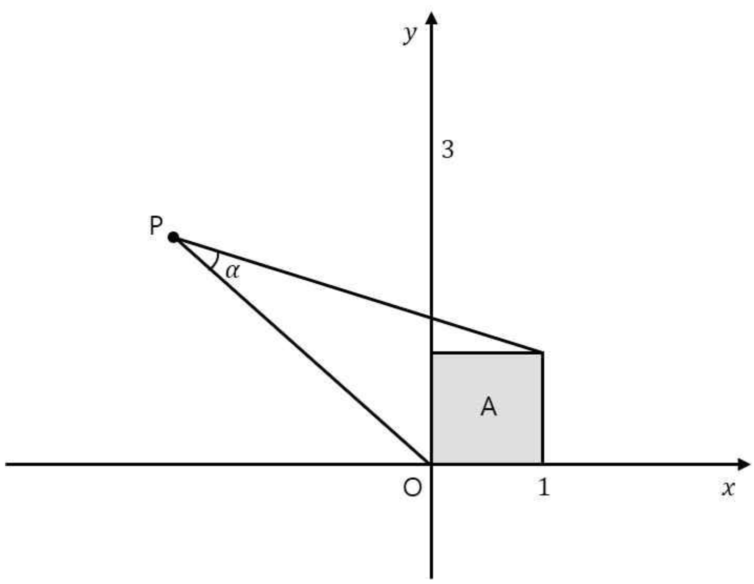


[문제 3] (나)에서 $t = \ln 6$ 에서의 미분계수 $S'(\ln 6)$을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [30점]

제시문 4

(가) 좌표평면 위에서 x축의 양의 방향을 시초선으로 잡았을 때, 일반각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $\mathrm{P}(x,y)$라 하면 $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$의 값은 r의 값과 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나로 정해진다. 이 함수를 차례로 θ에 대한 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 기호를 각각 $\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$로 정의하고, 이 함수들을 통틀어 θ에 대한 삼각함수라 한다.

(나) 그림에서 도형 A는 네 점 $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$이 꼭짓점인 정사각형이다. 점 P는 제 2사분면의 점으로 중심이 원점이고 반지름이 3인 원 위에 있다. α는 점 P에서 A를 바라본 각의 크기이다.



[문제 4] (나)에서 $\cos\alpha$가 최소가 될 때의 점 P의 좌표와 $\cos\alpha$를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [35점]

3. 출제 의도

[문제1] 원에 대한 접선을 구하고 곡선의 길이를 적분을 이용하여 구할 수 있는지 알아본다.
[문제2] 같은 것이 있는 순열의 수를 이해하고 구할 수 있는지 알아본다.
[문제3] 곡선 사이의 넓이를 적분을 이용하여 구할 수 있는지 알아본다. 합성함수를 미분할 수 있는지 알아본다.
[문제4] 코사인법칙을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 알아본다. 삼각함수 및 삼각함수의 덧셈정리를 이용할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호【별책 8】“수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 1	수학 - (2) 기하 [3] 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. 수학 II - (2) 미분 [3] 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 [2] 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 2	확률과통계 - (1) 경우의 수 [1] 순열과 조합 [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
문제 3	미적분 - (2) 미분법 [2] 여러 가지 미분법 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 [2] 정적분의 활용 [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 4	수학 - (3) 수와 연산 [2] 명제 [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. 수학 I - (2) 삼각함수 [1] 삼각함수 [12수학I02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 [1] 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	박교식 외	동아출판	2020	165
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2021	15
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	63, 89, 165
	수학 I	이준열 외	천재교육	2020	76
	수학	이준열 외	천재교육	2020	145
	수학 I	황선욱 외	미래엔	2021	104
	수학 II	고성은 외	좋은책신사고	2021	119
	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2020	25

5. 문항 해설

[문제1] 원에 대한 접선을 구하고 곡선의 길이를 적분을 이용하여 구할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 같은 것이 있는 순열의 수를 이해하고 구할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 곡선 사이의 넓이를 적분을 이용하여 표현하고, 합성함수 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 알아본다.

[문제4] 코사인법칙과 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 알아본다.

6. 채점 기준 ※ 선다형의 경우 생략 가능

하위 문항	채점 기준	배점
1	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 곡선의 보이는 부분을 정확하게 구함. B: 접선과 곡선의 교점의 x좌표 $1, \sqrt{3}$를 구함. C: 접선의 기울기 $\frac{2}{3}$를 구함. D: 접선의 기울기를 틀리게 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	15
2	A+: (1)과 (2)의 답과 풀이가 맞음. A: (1)과 (2)의 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: (1)의 답과 풀이가 맞고, (2)의 1단계를 맞게 구함. 또한 (2)의 2단계 또는 3단계를 맞게 구함, B: (1)의 답과 풀이가 맞고, (2)의 1단계를 맞게 구함. C: (1)의 답과 풀이가 맞음. D: (1)의 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20
3	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $S'(t) = -e^{-(a-t)} + e^t$와 $t = \ln 6$일 때 $a = \ln 2$임을 구함. B: $S'(t) = -e^{-(a-t)} + e^t$를 구함. $t = \ln 6$일 때 a의 값을 구하였으나 틀림, C: $S'(t) = -e^{-(a-t)} + e^t$를 구함. D: $S(t)$의 식을 맞게 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30
4	A+: 답과 풀이가 모두 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $\cos\alpha$의 최솟값을 맞게 구함. B: (1) 또는 (2) 경우의 $\cos\alpha$의 최솟값을 맞게 구함. C: $\cos\alpha$를 코사인법칙을 이용하여 구함. D: 점 P의 y좌표에 따라 두 가지 경우로 나눔. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	35

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1번]　답 : $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$

[풀이]

원의 접선 $y=mx$에서 원의 중심 $\left(0, \dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)$까지의 거리는 원의 반지름과 같으므로 $\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ 이고 제 1사분면에서 만나므로 $m=\dfrac{2}{3}$ 이다.

접선과 곡선의 교점은

$\dfrac{2}{3}x=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2x}$ 로부터 $x^2=1$ 또는 3이다.

교점은 제 1사분면에 있으므로 2개이고, 두 교점의 x좌표는 각각 1, $\sqrt{3}$이다.

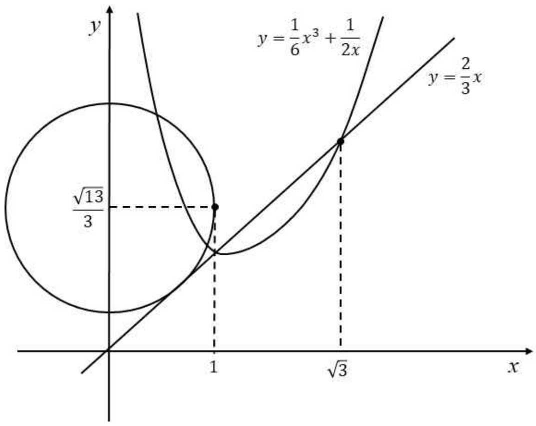
곡선 $y=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2x}$ 에서 $y'=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2x^2}$ 이다.

따라서 $x=1$에서 극값을 갖고, $0<x<1$에서 $y'<0$, $x>1$에서 $y'>0$이다.

따라서 제 1사분면에서 곡선 $y=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2x}$ 은 $0<x<1$에서 감소하고 $x>1$에서 증가하며 $x=1$에서 최솟값 $\dfrac{2}{3}$ 를 갖는다.

원 위의 점의 x좌표의 최댓값은 1이고 $x=1$일 때 원 위의 점의 좌표는 $\left(1, \dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)$이다.

따라서 점 $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$는 원 밖의 점이다.



따라서 $1 \le x \le \sqrt{3}$ 일 때 곡선이 보인다. 곡선의 길이는

$$\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2x}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$$

[문제 2번] 답 : (1) 231,000, (2) 118,800

[풀이]

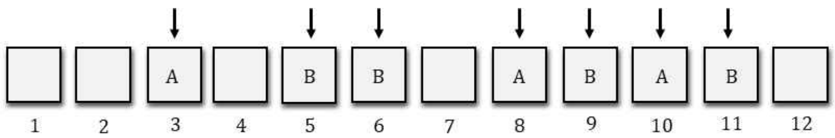
(1) 먼저 D가 연속하여 나타나는 경우의 수를 구한다. 이 경우 DD를 하나로 생각하면 D가 연속으로 나타나게 배열하는 방법의 수는 모두 $\frac{11!}{3!\times 4!\times 3!\times 1!}$ 이다.

따라서 문자 D가 연속하여 나타나지 않는 경우의 수는

$$\frac{12!}{3!\times 4!\times 3!\times 2!}-\frac{11!}{3!\times 4!\times 3!\times 1!}=\frac{5\times 11!}{3!\times 4!\times 3!}=231{,}000$$

(2) 다음과 같이 1단계, 2단계, 3단계로 분석하여 각 단계별 경우의 수를 구한다.

(1단계) 먼저 12자리 중 문자 A와 B의 위치를 결정한다. A와 B가 총 7개이므로 12개의 자리에서 7자리를 택하는 방법의 수는 ${}_{12}C_7$이다.



(2단계) 선택된 7자리에 문자 A와 B를 배치하는 방법의 수를 구한다.

문자 A와 B의 위치가 결정되었을 때, 선택된 7자리 중 가장 왼쪽에 위치한 자리는 문자 A를 놓고 나머지 6자리에 2개의 문자 A와 4개의 문자 B를 배치하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!\times 4!}$ 이다.

(3단계) 남은 자리 5개에 문자 C와 D를 배치한다. 문자 C가 3개, 문자 D가 2개이므로 $\frac{5!}{3!\times 2!}$가지의 경우가 있다.

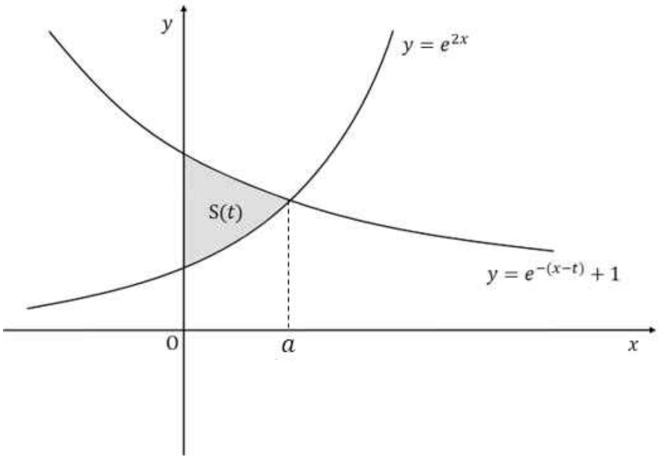
따라서 1단계, 2단계, 3단계에 의해 [조건 2]를 만족하면서 A, B, C, D를 배열하는 방법의 수는

$${}_{12}C_7\times\frac{6!}{2!\times 4!}\times\frac{5!}{3!\times 2!}=118{,}800$$

이다.

[문제 3번] 답 : 3

[풀이]



두 곡선의 교점의 x좌표를 a라 하자. 즉, $e^{2a} = e^{-(a-t)} + 1$이다.

그러면, $S(t) = \int_0^a (e^{-(x-t)} + 1 - e^{2x})\,dx = -e^{-(a-t)} + a - \frac{1}{2}e^{2a} + e^t + \frac{1}{2}$이다.

t에 대해 미분하면,

$S'(t) = -e^{-(a-t)}\left(1 - \frac{da}{dt}\right) + \frac{da}{dt} - e^{2a}\frac{da}{dt} + e^t = (e^{-(a-t)} + 1 - e^{2a})\frac{da}{dt} - e^{-(a-t)} + e^t$

$e^{2a} = e^{-(a-t)} + 1$이므로, $S'(t) = -e^{-(a-t)} + e^t$이다.

$t = \ln 6$일 때 $e^{2a} = 6e^{-a} + 1$이고, 따라서 $e^{3a} - e^a - 6 = 0$이다.

$b = e^a$라 하면, $b^3 - b - 6 = 0$이다. 따라서 $(b-2)(b^2 + 2b + 3) = 0$이고, $b = 2$를 얻는다.

$e^a = b = 2$이므로, $t = \ln 6$일 때 $a = \ln 2$이다.

따라서 $S'(\ln 6) = -e^t e^{-a} + e^t = -6 \times \frac{1}{2} + 6 = 3$이다.

[문제 4번] 답 : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, 점 P 의 좌표: $\left(1 - \frac{\sqrt{14}}{2},\ 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$

[풀이]

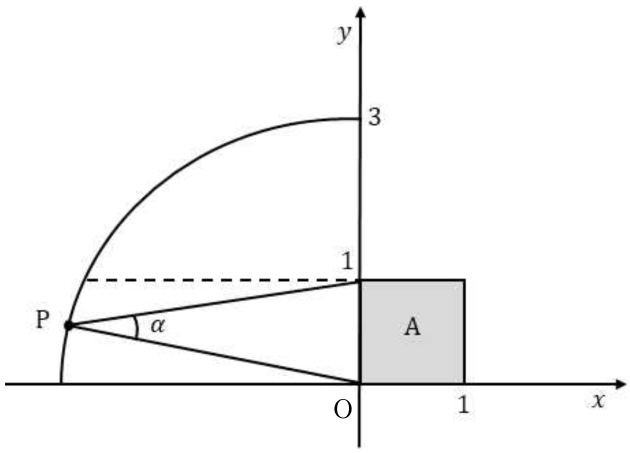
다음의 두 가지 경우로 나누어서 푼다.

(1) 점 P 의 y좌표가 1보다 작거나 같을 때:

점 P 에서 점 $(0,1)$까지의 거리를 d라 하자. (단, $d > 0$)

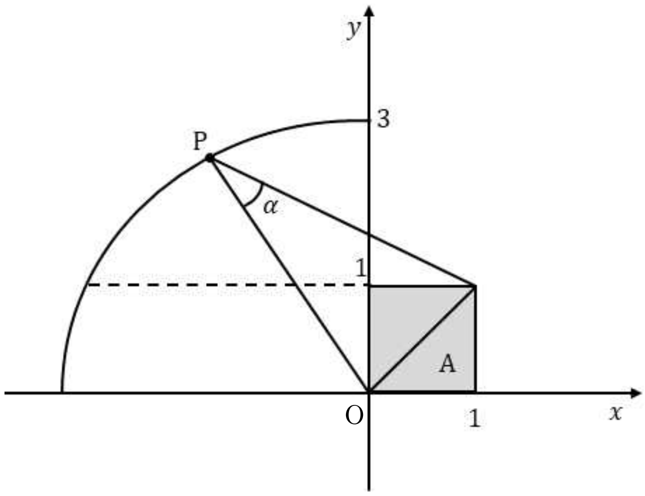
코사인법칙을 이용하면

$\cos\alpha = \frac{9 + d^2 - 1}{6d} = \frac{4}{3d} + \frac{d}{6} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$



(2) 점 P 의 y좌표가 1보다 클 때:
점 P 에서 점 $(1, 1)$까지의 거리를 d라 하자. (단, $d > 0$)
코사인법칙을 이용하면

$$\cos\alpha = \frac{9+d^2-2}{6d} = \frac{7}{6d} + \frac{d}{6} \geq \frac{\sqrt{7}}{3}$$



(1), (2)에 의하여 $\cos\alpha$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{7}}{3}$이다.

등호는 $\frac{7}{6d} = \frac{d}{6}$일 때 성립하고, 이때 $d = \sqrt{7}$이다. 점 $(1,1)$을 Q라 하고 $d = \sqrt{7}$일 때 각 POQ의 크기를 θ라 하자.

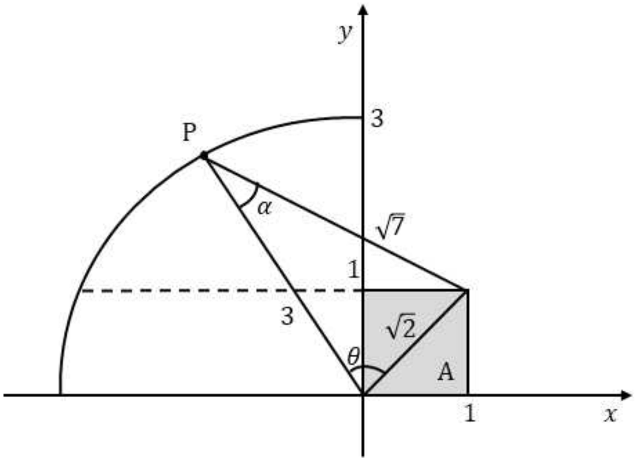
$\cos\theta = \frac{9+2-7}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이고, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$이다.

점 P 의 x좌표는

$3\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}$이다.

점 P 의 y좌표는

$3\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}$이다.



y
3
P
α
√7
1
3
√2
θ
A
1
x