2024학년도 건국대학교 모의논술고사
자연계 문제해설지

1. 출제 의도

[문제 1]
삼각함수의 뜻을 알고 코사인법칙을 이해하고 이를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2]
코사인법칙을 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다. 또한 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 3]
곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 나타낼 수 있는지 알아본다. 정적분과 미분의 관계를 이해하고 함수의 곱의 미분법을 이해하고 있는지 알아본다.

[문제 4]
역함수와 역함수의 미분을 이해하고 있는지 알아본다. 또한 삼각함수의 덧셈정리를 활용할 수 있는지, 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 알아본다.

2. 문항 해설

[문제 1]
삼각형의 넓이를 코사인 정리를 이용하여 나타내고, 주어진 조건을 활용하여 값을 구한다.

[문제 2]
선분의 길이를 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 나타낸다. 미분하여 극값을 찾고 최댓값과 최솟값을 판별하여 구한다.

[문제 3]
곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분으로 나타낸다. 적분과 미분의 관계를 이용하고, 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분값을 구한다.

[문제 4]
역함수를 이용하여 선분의 길이를 함수로 표현한다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 길이를 구한다. 역함수를 미분하여 극값을 찾고 그래프의 개형을 고려하여 최댓값을 찾는다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[문제 1]	A+: 정답과 풀이가 맞음 A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음 B+: CQ, CR, $\sin C$ (혹은 AQ, BR, $\cos C$)를 모두 구한 경우 B: CQ, CR, $\sin C$ (혹은 AQ, BR, $\cos C$)중에서 두 개만 구한 경우 C: CQ, CR, $\sin C$ (혹은 AQ, BR, $\cos C$)중에서 한 개만 구한 경우 D: 삼각형의 넓이를 각을 이용하여 나타냄 E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함 F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음	15

하위 문항	채점 기준	배점
[문제 2]	A+: 정답과 풀이가 맞음 A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음 B+: PQ의 길이를 함수 $f(x)$로 표현하고 극값을 구함 B: PQ의 길이를 함수 $f(x)$로 표현함 C: 삼각형 ABC의 넓이나 APQ의 넓이를 PQ의 길이를 이용하여 나타냄 D: 삼각형 ABC나 APQ의 넓이를 구함 E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함 F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음	30

하위 문항	채점 기준	배점
[문제 3]	A+: 정답과 풀이가 맞음 A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음 B+: 도형의 넓이를 정적분으로 나타내고 미분하여 $S'(t) = \frac{1}{2}(tf'(t) - f(t))$을 구함 B: 도형의 넓이를 $S(t) = \frac{1}{2}tf(t) - \int_0^t f(x)dx$로 구하고 미분하였으나 미분이 틀림 C: 직선 l의 방정식을 구하고 도형의 넓이를 $S(t) = \frac{1}{2}tf(t) - \int_0^t f(x)dx$로 나타냄 D: 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 나타냄 E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함 F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음	20

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[문제 4]	A+: $\tan L\left(\frac{1}{4}\right)$와 t^2을 모두 구하고 풀이가 맞음 A: $\tan L\left(\frac{1}{4}\right)$와 t^2의 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있거나 최댓값에 대한 설명이 없음 B+: $\tan L\left(\frac{1}{4}\right)$를 구하고 $L'(t)=0$이 되는 t^2을 구하였으나 답이 틀림 B: $\tan L\left(\frac{1}{4}\right)$만 구하였거나 $L'(t)=0$이 되는 t^2만 구하였음 C: $\tan L\left(\frac{1}{4}\right)$만 구하거나 $L'(t)$만 구하였으나 t에 대한 함수로 정리하지 못함 D: 길이 $L(t)$를 $g(x), h(x)$의 역함수를 이용하여 표현함 E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함 F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음	35

4. 예시 답안

[문제 1] 정답: $\sqrt{6}$

삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면,

$\cos C = \dfrac{5^2+7^2-6^2}{2\times5\times7} = \dfrac{19}{35}$ 이다.

이로부터 $\sin C = \dfrac{12\sqrt{6}}{35}$ 임을 알 수 있다. $\overline{AP}=\overline{BP}=3=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$이고 삼각형 APQ와 PBR의 넓이는

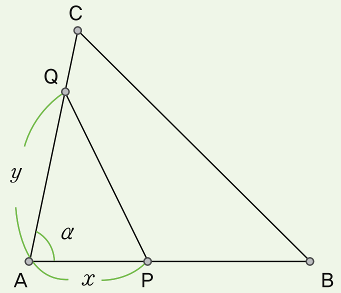
각각 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{3}$ 배이므로 $\overline{AQ}$와 $\overline{BR}$은 각각 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$ 배이다.

따라서 $\overline{AQ}=\dfrac{5}{2}$, $\overline{BR}=\dfrac{14}{3}$ 이다.

이제 $\overline{CQ}=\dfrac{5}{2}$, $\overline{CR}=\dfrac{7}{3}$ 이므로, 삼각형 CQR의 넓이를 구하면

$\dfrac{1}{2}\times\overline{CQ}\times\overline{CR}\times\sin C = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{35}{6}\times\dfrac{12\sqrt{6}}{35} = \sqrt{6}$ 이다.

[문제 2] 정답: 최솟값은 $2\sqrt{6}$, 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{145}}{2}$



$\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$, $\angle PAQ=\alpha$라 하자.

삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면, $\cos\alpha=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6}=\dfrac{1}{5}$ 이다.

이로부터 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ 임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\times5\times6\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$ 이다.

문제의 조건에 의하여 삼각형 APQ의 넓이는 $3\sqrt{6}$ 이다. 그런데 삼각형 APQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}xy\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{5}xy$ 이므로 $xy=15$임을 알 수 있다.

코사인법칙을 적용하면

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha=x^2+y^2-2xy\times\dfrac{1}{5}=x^2+y^2-6$이다.

문제의 조건에 의하여 $0<x\le6$, $0<y\le5$이다.

$y=\dfrac{15}{x}$ 이므로 $0<\dfrac{15}{x}\le5$이다. 이를 정리하면 $x\ge3$, 따라서 $3\le x\le6$이다.

$\overline{PQ}^2=f(x)$라 하면 $f(x)=x^2+\dfrac{15^2}{x^2}-6$.

$f'(x)=2x-(15^2)2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}(x-\sqrt{15})(x+\sqrt{15})(x^2+15^2)$

$3\le x\le6$ 범위에서 $x<\sqrt{15}$ 이면 $f'(x)<0$이고 $x>\sqrt{15}$ 이면 $f'(x)>0$

따라서 $f(x)$는 $x=\sqrt{15}$ 에서 최솟값을, $x=3$ 또는 $x=6$에서 최댓값을 가진다.

$f(\sqrt{15})=24$, $f(3)=28$, $f(6)=\dfrac{145}{4}$.

그러므로 $\overline{PQ}$의 최솟값은 $2\sqrt{6}$, 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{145}}{2}$ 이다.

[문제 3] 정답: −8

직선 l을 $y=mx$ 라 하면, $S(t)=\displaystyle\int_t^0(f(x)-mx)dx$ 이다.

따라서, $S(t)=\displaystyle\int_0^t(mx-f(x))dx=\frac{1}{2}mt^2-\int_0^t f(x)dx$ 이다.

직선 l이 원점과 점 $(t,f(t))$를 지나므로 $m=\dfrac{f(t)}{t}$ 이고, $S(t)=\dfrac{1}{2}tf(t)-\displaystyle\int_0^t f(x)dx$ 이다.

t에 대해 미분하면, $S'(t)=\dfrac{1}{2}f(t)+\dfrac{1}{2}tf'(t)-f(t)=\dfrac{1}{2}(tf'(t)-f(t))$이다.

따라서 $S'(-2)=\dfrac{1}{2}\times((-2)\times(-2)-20)=-8$ 이다.

[문제 4] 정답: $\tan L\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}-2}{2\sqrt{15}+1}$, $t^2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{8}$

$L(t) = g^{-1}(t) - h^{-1}(t)$이다.

$g(a) = \frac{1}{2}\tan a = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan a = \frac{1}{2}$, $h(b) = \sin b = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan b = \frac{1}{\sqrt{15}}$ 이다.

탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan L\left(\frac{1}{4}\right) = \tan\left(g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - h^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

$$= \tan(a-b)$$

$$= \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{15}}}{1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{15}}} = \frac{\sqrt{15}-2}{2\sqrt{15}+1}$$ 이다.

$L(t) = g^{-1}(t) - h^{-1}(t)$을 미분하고, $\frac{1}{2}\tan x_1 = t \Rightarrow \cos x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

$\sin x_2 = t \Rightarrow \cos x_2 = \sqrt{1-t^2}$을 이용하여

$$L'(t) = \frac{1}{g'(g^{-1}(t))} - \frac{1}{h'(h^{-1}(t))} = \frac{2}{\sec^2(x_1)} - \frac{1}{\cos(x_2)}$$

$$= \frac{2}{4t^2+1} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-t^2} - (4t^2+1)}{(4t^2+1)\sqrt{1-t^2}}$$

이고, $L'(t) = 0$에서 $\frac{2\sqrt{1-t^2} - (4t^2+1)}{(4t^2+1)\sqrt{1-t^2}} = 0 \Leftrightarrow 16t^4 + 12t^2 - 3 = 0$

$\therefore t^2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{8}$을 만족하는 양수 t에서 $L(t)$는 극값을 가진다.

$0 \le t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$에 대하여 $L(0) = 0 = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 연속함수 $L(t)$는 $t=0$일 때 0에서 시작해서

연속적으로 커지다가 다시 줄어들어 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$일 때 다시 0이 된다.

따라서 $t^2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{8}$인 양수 t에서 $L(t)$는 최댓값이 된다.

5. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	62, 155
	수학 Ⅰ	배종숙 외	금성출판사	2018	78–81, 102
	수학 Ⅱ	이진호 외	좋은책 신사고	2018	84
	수학 Ⅱ	김원경 외	비상	2018	88
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	67, 96
	수학 Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2018	65–66, 127, 136