▶ 문항카드 3

[건국대학교 문항정보]

1. 일반 정보

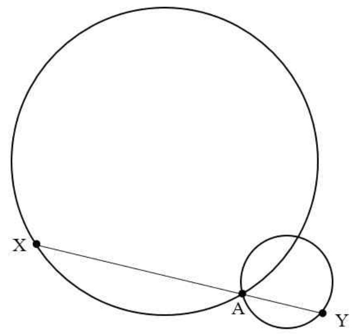
유형	■ 논술고사　□ 면접 및 구술고사　□ 선다형고사	
전형명	KU논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계A(수학) / 문제 1, 2, 3, 4, 5	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 도함수, 치환적분, 부분적분, 중복조합, 합성함수의 미분
예상 소요 시간	100분	

2. 문항 및 제시문

제시문 1

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(나) 그림에서 점 A는 원 $x^2+6x+y^2-8y=0$과 원 $x^2-2x+y^2=0$의 교점이다. 점 A를 지나는 직선이 두 원과 만나는 점이 각각 X, Y이다. (단, X, Y는 A가 아닌 점이다.)

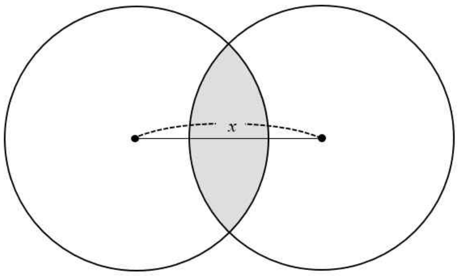


[문제 1]　(나)에서 $\overline{\mathrm{XY}}$의 최댓값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [10점]

제시문 2

(가) 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$이다.

(나) 그림에서 두 원의 반지름의 길이는 1이고 중심 사이의 거리는 x이다. 두 원 내부의 공통 부분의 넓이를 $A(x)$라고 하자.

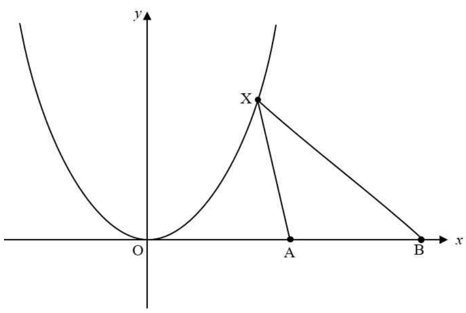


[문제 2] (나)에서 정적분 $\int_0^2 A(x)dx$ 의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [15점]

제시문 3

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 미분계수 $f'(a)$와 같다.

(나) 그림에서 점 X는 곡선 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x^2$ 위의 점이고 점 A, B는 x축 위에 있다.

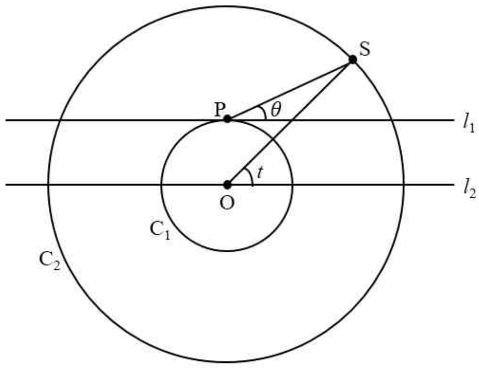


[문제 3] (나)에서 점 A, B의 좌표가 각각 $(2,0)$, $(4,0)$일 때 $\sin(\angle \mathrm{AXB})$의 최댓값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [20점]

제시문 4

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$의 도함수는 $y' = f'(g(x))g'(x)$이다.

(나) 그림에서 C_1, C_2는 중심이 O인 동심원이고 C_1의 반지름은 r, C_2의 반지름은 R이다. 직선 l_1은 원 C_1과 점 P에서 접한다. 직선 l_2는 점 O를 지나고 l_1과 평행하다. 점 S는 원 C_2를 따라 돌고 있다. 시각 t일 때 직선 l_2와 직선 OS가 이루는 각의 크기가 t이고, θ는 직선 l_1와 직선 PS가 이루는 각의 크기이다.



[문제 4] (나)에서 $R = 4r$라고 하자. $\theta = 0$일 때의 $\dfrac{d\theta}{dt}$와 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$일 때의 $\dfrac{d\theta}{dt}$를 모두 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [25점]

제시문 5

(가) 실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내자.
예를 들어 $[4]=4$이고 $\left[\dfrac{21}{5}\right]=4$이다.

(나) 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$은 다음과 같이 정의한다.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{10^k}\right]$$

예를 들어, $f(123)=\left[\dfrac{123}{10}\right]+\left[\dfrac{123}{10^2}\right]+\left[\dfrac{123}{10^3}\right]+\cdots=12+1+0+\cdots=13$이다.

[문제 5]
(나)에서 정의된 함수 $f(n)$을 이용하여 함수 $g(n)$을 다음과 같이 정의한다.

$$g(n)=f(10n)-10f(n)$$

다음을 만족하는 자연수 n의 개수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

$$g(n)=8,\quad 1\le n\le 6200$$

[30점]

3. 출제 의도

[문제1] 주어진 상황을 함수로 수식화하고 미분을 이용하여 최댓값을 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 주어진 영역의 넓이를 각도와 삼각함수를 이용해 표현하고 정적분을 정확히 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 접선을 구하고 최댓값을 가지는 상황에 대한 방정식을 세운 후 고차방정식을 풀 수 있는지 알아본다.

[문제4] 각의 크기가 변화할 때 이를 함수로 나타내고 변화율을 계산할 수 있는지 알아본다. 또한 미분 계산에서 합성함수의 미분을 할 수 있는지 알아본다.

[문제5] 함수식이 주어졌을 때 이에 따라 함수가 정의된 방식을 정확히 이해할 수 있는지 알아본다. 또한 경우의 수에 대한 문제 상황을 조합 및 중복조합을 이용해 표현하고 계산할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 【별책 8】
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 1	수학II - (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 수학 - (1) 기하 ③ 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
문제 2	① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문제 3	수학II - (2) 미분 ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. 수학 - (1) 문자와 식 ② 나머지정리 [10수학01-03] 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문제 4	미적분 - (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
문제 5	확률과통계 - (1) 경우의 수 ① 순열과 조합 [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다. 미적분 - (1) 수열의 극한 ② 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수학II	황선욱 외	미래앤	2021	86
수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2019	69
미적분	박교식 외	동아출판	2020	113
수학I	이준열 외	천재교육	2020	63
수학II	황선욱 외	미래앤	2021	48, 86
미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2018	12
수학	권오남 외	교학사	2020	269
확률과 통계	박교식 외	동아출판	2020	21
미적분	박교식 외	동아출판	2020	101
수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2019	92, 95
확률 및 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2018	23

교과서 외

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
해당없음						

5. 문항 해설

[문제1] 주어진 상황을 함수로 수식화하고 미분을 이용하여 최댓값을 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제2] 주어진 영역의 넓이를 각도와 삼각함수를 이용해 표현하고 정적분을 정확히 계산할 수 있는지 알아본다.

[문제3] 접선을 구하고 최댓값을 가지는 상황에 대한 방정식을 세운 후 고차방정식을 풀 수 있는지 알아본다.

[문제4] 각의 크기가 변화할 때 이를 함수로 나타내고 변화율을 계산할 수 있는지 알아본다. 또한 미분 계산에서 합성함수의 미분을 할 수 있는지 알아본다.

[문제5] 함수식이 주어졌을 때 이에 따라 함수가 정의된 방식을 정확히 이해할 수 있는지 알아본다. 또한 경우의 수에 대한 문제 상황을 조합 및 중복조합을 이용해 표현하고 계산할 수 있는지 알아본다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: B와 더불어 $\overline{\mathrm{XY}}$에 대한 함수식을 미분함. B: C와 더불어 $\overline{\mathrm{XY}}$에 대한 함수식을 구함. C: 교점을 모두 구함. D: $y=tx$로 놓고 교점을 하나 이상 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	10
2	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: B와 더불어 정적분 계산을 수행함. B: C와 더불어 정적분을 θ에 대한 적분으로 표현함. C: $A(x)$를 θ의 함수로 표현함. D: 부채꼴 또는 삼각형의 넓이를 모두 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	15
3	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 최대가 될 때의 접점을 구함. B: 외접원의 중심을 구함. C: 접선의 기울기를 표현함. D: 접선과의 관련을 파악함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20
4	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $\frac{dt}{d\theta}$의 값을 $\theta=0$일 때 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 중 하나를 계산함. B: 미분을 계산하여 $\frac{d\theta}{dt}$에 대한 식을 얻음. C: θ와 t의 관계식을 구함. D: 문제 풀이에 필요한 적절한 도형을 찾음. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	25
5	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: B와 더불어 중복조합 계산을 진행함. B: $g(n)=8$을 풀기 위해 중복조합의 필요성을 파악함. C: $g(n)$이 n의 자릿수의 합임을 제시함. D: $g(n)$의 의미를 파악하고자 시도함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1번] 답: 거리의 최댓값은 $8\sqrt{2}$

[풀이] 두 개의 원 $x^2+6x+y^2-8y=0 \cdots (1)$,
$x^2-2x+y^2=0 \cdots (2)$

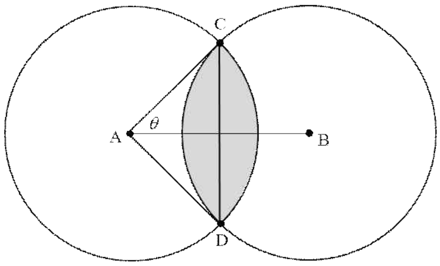
의 교점은 $(0,0),(1,1)$인데 둘 중 어느 점을 지나는 직선을 이용해 계산해도 결과는 같다.

점 $(0,0)$을 지나는 직선 $y=tx$가 원 (1)과 만나는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{8t-6}{1+t^2}, \dfrac{8t^2-6t}{1+t^2}\right)$이고 원 (2)와 만나는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$이다.

이 두 점 사이의 거리의 제곱은 $f(t)=\dfrac{64(t-1)^2}{(1+t^2)}$이고 $f'(t)=\dfrac{2(t-1)(t+1)}{(1+t^2)^2}=0$이므로 $t=-1$에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

최댓값은 $f(-1)=2 \cdot 64$ 이다. 그러므로 거리의 최댓값은 $\sqrt{2 \cdot 64}=8\sqrt{2}$.

[문제 2번] 답: $\dfrac{8}{3}$



[풀이] 두 원의 중심을 A, B라 하고 두 원의 교점을 C, D라 하자. 각 CAB의 크기를 θ라 하자.

부채꼴 CAD의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (2\theta)=\theta$, 삼각형 CAD의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(2\theta)=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$ 이다.

공통부분의 넓이는 부채꼴 CAD의 넓이에서 삼각형 CAD의 넓이를 뺀 것의 2배이므로

$$A(x)=2\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)=2\theta-\sin 2\theta.$$

$x=2\cos\theta$이므로 $dx=-2\sin\theta\, d\theta$이다. $x=0$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이고 $x=2$일 때 $\theta=0$이므로

$$\int_0^2 A(x)\,dx = \int_0^2 2\theta - \sin 2\theta\ dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2\theta - \sin 2\theta)\,(-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta - 2\sin\theta\cos\theta)\,(2\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\theta\sin\theta - 4\sin^2\theta\cos\theta\ d\theta$$

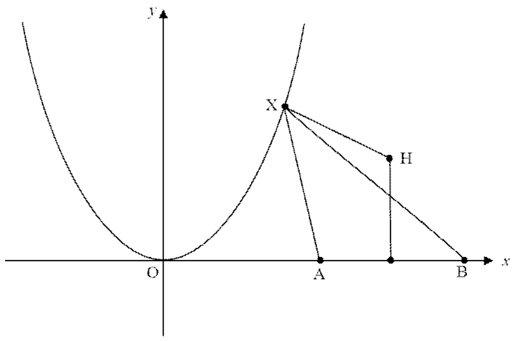
$$= \left[-4\theta\cos\theta + 4\sin\theta - \frac{4}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

위 계산에서는 다음 부분적분 및 치환적분이 사용되었다.

$$\int \theta\sin\theta\,d\theta = -\theta\cos\theta + \int \cos\theta\,d\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta + C$$

$$\int \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$$

[문제 3번] 답: $\sin\angle\mathrm{APB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



[풀이] 삼각형 ABX의 외접원의 중심의 좌표를 H(3,b)라 하자. X의 좌표를 $X\left(a, \frac{\sqrt{2}}{4}a^2\right)$라 하자.

HA와 HX의 길이가 같아야 하므로

$$1 + b^2 = (3-a)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{2}}{4}a^2\right) = 9 - 6a + a^2 + b^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 b + \frac{a^4}{8}.$$

이 식을 정리하면

(1) $$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2 b = 8 - 6a + a^2 + \frac{a^4}{8}.$$

직선 HX가 접선과 수직이어야 하므로

(2) $$\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a^2 - b}{a-3} = -1\ .$$

따라서 식 (2)를 정리하면

(3) $$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2 b = \frac{a^4}{4} + a^2 - 3a$$

따라서 (1)과 (3)으로부터

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2b = 8-6a+a^2+\frac{a^4}{8} = \frac{a^4}{4}+a^2-3a$$

이므로

(4) $$\frac{a^4}{8}+3a-8=0$$

를 얻는다. 이 방정식을 풀면 $(a-2)\left(\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}+4\right)=0$에서 $a=2$이다.

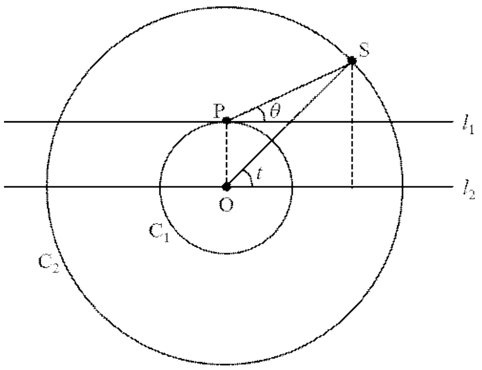
그러므로 $\sin(\angle \mathrm{AXB})$의 값이 최대가 되는 점 X의 좌표는 $(2, \sqrt{2})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AX}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BX}}=\sqrt{6}$이므로 $\angle \mathrm{BAX}=90^\circ$이다.

이로부터 $\sin\angle \mathrm{AXB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다.

[문제 4번] 답: $\theta'(0)=1$, $\theta'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{3}$

[풀이]



점 S로부터 x축에 수직으로 보조선을 그리면 그림과 같은 도형을 얻는다. 이로부터

(*) $$\tan\theta = \frac{R\sin t - r}{R\cos t}$$

을 얻는다. 이 식을 t에 관해 미분하면

(**) $$\frac{\theta'(t)}{\cos^2\theta} = \frac{R-r\sin t}{R\cos^2 t}$$

(1) $\theta=0$일 때 $\tan\theta=0$이므로 (*)로부터 $\sin t=\frac{r}{R}=\frac{1}{4}$, $\cos t=\frac{\sqrt{15}}{4}$이다.

그러므로 $\theta'(0)=1$이다. (주의: $\theta=0$일 때 $t\neq 0$이다.)

(2) $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때에는 $t=\frac{\pi}{2}$인데, 이를 (**)에 바로 대입하여 답을 얻을 수 없다.

(방법1) (*)에서 $\cos\theta = \frac{R\cos t\sin\theta}{R\sin t - r}$를 (**)에 대입하면

$$\theta'(t)=\frac{R-r\sin t}{R\cos^2 t}\cdot\cos^2\theta=\frac{(R-r\sin t)\cdot R\sin^2\theta}{(R\sin t-r)^2}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{\pi}{2}$를 대입하면 $\theta'(\frac{\pi}{2})=\frac{3r\cdot 4r}{(3r)^2}=\frac{4}{3}$

(방법2) (*)에서 $\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{R^2\cos^2 t}{R^2-2rR\sin t+r^2}$를 (**)에 대입하면

$\theta'(t)=\frac{R(R-r\sin t)}{R^2-2rR\sin t+r^2}$이고, 이 식에 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{\pi}{2}$, $R=4r$를 대입하면

$\theta'(\frac{\pi}{2})=\frac{3r\cdot 4r}{(3r)^2}=\frac{4}{3}$

[문제 5번] 답: 161개

[풀이] 먼저, $g(n)$은 n의 자리수의 합인 것을 관찰할 수 있다. 예를 들어

$$\begin{aligned}g(5432)&=f(54320)-10f(5432)\\&=5432+543+54+5-10(543+54+5)\\&=(5432-5430)+(543-540)+(54-50)+5\\&=2+3+4+5=14\end{aligned}$$

일반적으로 $n=a_1a_2\cdots a_m=a_1\cdot 10^{m-1}+a_2\cdot 10^{m-2}+\cdots+a_{m-1}\cdot 10+a_m$, 즉 n의 각 자리수가 $a_1,\cdots,a_m$일 때

$$\begin{aligned}g(n)&=f(10n)-10f(n)\\&=\left\{(a_1 10^{m-1}+\cdots+a_m)+(a_1 10^{m-2}+\cdots+a_{m-1})+\cdots+(a_1\cdot 10+a_2)+a_1\right\}\\&\quad-10\left\{(a_1 10^{m-2}+\cdots+a_{m-1})+(a_1 10^{m-3}+\cdots+a_{m-2})+\cdots+a_1\right\}\\&=\left\{(a_1 10^{m-1}+\cdots+a_m)-(a_1 10^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\cdot 10)\right\}\\&\quad+\left\{(a_1 10^{m-2}+\cdots+a_{m-1})-(a_1 10^{m-2}+\cdots+a_{m-2}\cdot 10)\right\}\\&\quad+\cdots+\left\{(a_1\cdot 10+a_2)-a_1\cdot 10\right\}+a_1\\&=a_m+a_{m-1}+\cdots+a_2+a_1\end{aligned}$$

따라서 $g(n)=a_1+\cdots+a_m$이 성립한다. 즉 $g(n)$은 n의 자리수의 합이다.

4자리 이하의 음이 아닌 정수 $n=a_1a_2a_3a_4$ (즉 $0\le n\le 9999$인 정수 n) 중에서 $g(n)=8$을 만족하는 것의 개수는 다음을 만족하는 정수들의 개수와 같다.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8,\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$$

중복조합을 이용하여 구하면 총 개수는 ${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1}=165$이다.

이 중에서 첫 번째 자리수가 8인 것은 8000으로 1개가 있는데, 이것은 6200보다 크다.

첫 번째 자리수가 7인 것은 7100, 7010, 7001 이렇게 3개가 있는데, 이들은 모두 6200보다 크다.

첫 번째 자리수가 6인 것은 모두 6200, 6020, 6002, 6110 등 모두 6200 이하이다.

첫 번째 자리수가 5 이하인 것은 모두 6200 이하이다.

따라서 구하는 개수는 $165-(1+3)=161$개다.