경희대학교

2025학년도 신입생 수시모집

논술고사 문제지(자연계)

[11월 17일(일) **오전**]

지원학부(과) (   )   수험번호 | | | | | | | | | | 성 명 (   )

<유의사항 : 아래 내용 위반시 감점 또는 0점 처리할 수 있음>

1. 답안의 작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 흑색 필기구를 사용하시오.
2. 답안지에 제목을 쓰지 말고, 특별한 표시를 하지 마시오.
3. 답안지에 답안과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오(예: 감사합니다 등).
4. 답안 작성 시 논제번호(예: Ⅰ, Ⅱ⋯)에 맞춰 답안을 작성하며, 논제별 소문제번호[예: (1), (2)⋯]를 쓰고 이어서 논술하시오.
5. 답안 정정 시에는 두 줄을 긋고 작성하며, 수정도구(수정액 또는 수정테이프) 사용은 절대 불가하므로 유의하시오.
6. 답안은 한국어, 숫자, 기호로 작성하며, 띄어쓰기를 포함하여 논제별 분량 제한을 준수하고, 답안지는 모든 논제를 포함하여 반드시 최종 1장만 제출 가능하오니 각별히 유의하시오.
7. 지정된 답안의 영역을 벗어나지 않도록 작성해야 하며, 뒷면에 거꾸로 작성하지 않도록 유의하시오.
8. **자연계 문제지는 총 2장 3쪽(표지 제외)입니다.**

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

[가] 평면벡터의 내적

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta(0° \le \theta \le 180°)$일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

[나] 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$으로

① 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

② 외분하는 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m \neq n$)

[다] 일반적으로 두 변수 x, y 사이의 관계가 변수 t를 매개로 하여 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타내어질 때, 변수 t를 x, y의 매개변수라 하고 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$를 매개변수로 나타낸 함수라고 한다.

[라] 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

[마] 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}(a \neq 0)$은

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

② $|r| \ge 1$일 때, 발산한다.

[바] 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

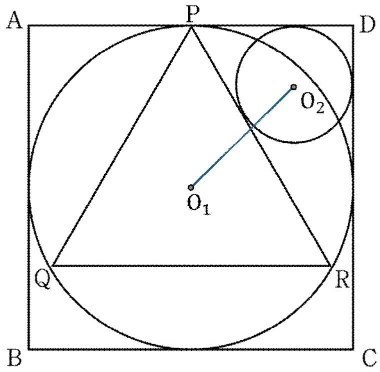
[사] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

< 뒷면에 계속 >

[논제 Ⅰ] <그림 1>과 같이 중심을 각각 점 $\mathrm{O_1}$, 점 $\mathrm{O_2}$로 하는 두 원 O_1, O_2가 있다. 이때, 원 O_1은 정사각형 ABCD에 내접하고, 정삼각형 PQR는 원 O_1에 내접한다. 또한 원 O_2는 세 선분 PR, PD, CD와 모두 접한다. 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 4라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 점 P는 변 AD 위에 있다.)



<그림 1>

(1) 선분 $\mathrm{O_1O_2}$의 길이를 구하고 그 근거를 논술하시오. (14점)

(2) 원 O_2 위를 움직이는 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{QR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PX}}$의 최댓값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (16점)

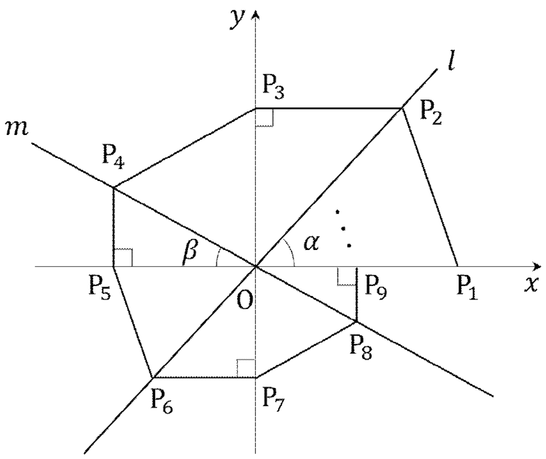
[논제 Ⅱ] 길이가 5인 막대가 좌표평면 위에서 움직인다. 막대의 한 쪽 끝점을 P, 다른 쪽 끝점을 R라 할 때, 선분 PR를 $2:3$으로 내분하는 막대 위의 점을 Q라 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, 막대는 변형되지 않고, 그 두께는 무시한다.)

(1) 점 P가 점 $(-4,\ 0)$에서 점 $(4,\ 0)$까지 x축을 따라 움직인다. 점 P가 움직이는 동안 점 Q는 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$을 따라 움직인다고 할 때, 점 R가 그리는 곡선을 나타내는 함수 $y=f(x)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (단, 점 P가 원점에 있을 때, 점 Q의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.) (15점)

(2) (1)에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 $y=5-\dfrac{x^2}{a}$의 서로 다른 교점이 2개 이상이 되는 양수 a의 범위를 구하고 그 근거를 논술하시오. (18점)

< 다음 면에 계속 >

[논제 Ⅲ] <그림 2>와 같이 좌표평면 위에 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선 l과 기울기가 음수인 직선 m이 있다. (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$) 점 $P_1(1,0)$에서 시작하여 제1사분면에서 $\angle P_1P_2O=\frac{\pi}{3}$인 직선 l 위의 점 P_2를 찾는다. 점 P_2에서 y축에 내린 수선의 발을 P_3, 제2사분면에서 $\angle P_3P_4O=\frac{\pi}{3}$인 직선 m 위의 점 P_4를 찾는다. 점 P_4에서 x축에 내린 수선의 발을 P_5라 하자. 이와 같은 방법으로 하여, 시계 반대 방향으로 점 $P_6, P_7, P_8, P_9, \cdots$ 를 한없이 만들어 나갈 때, 다음 물음에 답하시오.



<그림 2>

(1) $\overline{OP_5}$를 α와 β에 대한 식으로 정리하면

$$\overline{OP_5}=A\sin(\alpha+B)\sin\alpha\cos(\beta+C)\cos\beta$$

일 때, 상수 A, B, C의 값을 각각 구하고 그 근거를 논술하시오. (단, $0<B<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<C<0$) (16점)

(2) $\beta=\frac{\pi}{6}$일 때, x축 위의 점 $P_1, P_5, P_9, \cdots$ 에 대하여, $\overline{OP_1}+\overline{OP_5}+\overline{OP_9}+\cdots$ 의 합을 α에 대한 식으로 구하고, 이를 $f(\alpha)$라 하자. 이때, $f(\alpha)$의 증가와 감소의 표를 구하시오. 이를 이용하여 $f(\alpha)$가 최대가 되는 α의 값과, 그때의 최댓값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (21점)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	(자연)계열 / (Ⅰ)문항

2. 2025학년도 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

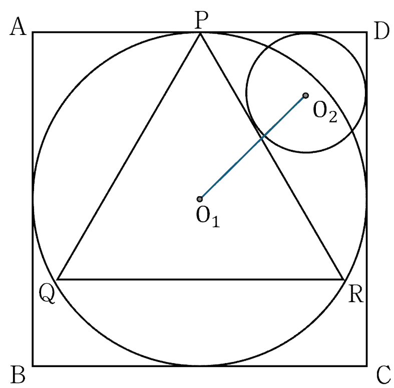
[가] 평면벡터의 내적

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta(0° \le \theta \le 180°)$일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

[문항]

[논제 Ⅰ] <그림 1>과 같이 중심을 각각 점 $\mathrm{O_1}$, 점 $\mathrm{O_2}$로 하는 두 원 O_1, O_2가 있다. 이때, 원 O_1은 정사각형 ABCD에 내접하고, 정삼각형 PQR는 원 O_1에 내접한다. 또한 원 O_2는 세 선분 PR, PD, CD와 모두 접한다. 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 4라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 점 P는 변 AD 위에 있다.)



<그림 1>

(1) 선분 $\mathrm{O_1O_2}$의 길이를 구하고 그 근거를 논술하시오. (14점)

(2) 원 O_2 위를 움직이는 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{QR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PX}}$의 최댓값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (16점)

3. 2025학년도 논술고사 출제 의도

[논제 Ⅰ]에서는 고등학교 교육과정의 평면벡터의 기본 개념을 종합적으로 이해하고, 벡터의 뜻과 연산, 평면벡터의 성분과 내적을 응용할 수 있는지 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 평면도형을 이해하고, 벡터를 활용하여 문제 해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2025학년도 논술고사 문항 해설

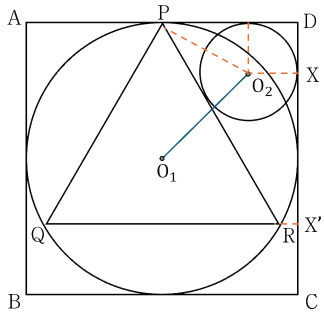
[논제 Ⅰ]에서는 평면도형을 이해하고, 벡터의 연산과 두 평면벡터의 내적을 활용하여 주어진 조건에서 선분의 길이를 파악하고, 두 벡터의 내적이 최대가 되도록 하는 상황을 추론하여 연산 결과를 구하는 문제 상황을 해결할 수 있는지를 평가하고자 한다.

5. 2025학년도 논술고사 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제 Ⅰ-(1)	<6점> 도형의 위치 관계를 이해하여 원 O_2의 반지름 $r=\sqrt{3}-1$을 구한다. <8점> $\overline{\mathrm{O_1O_2}}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$을 구한다.	14점
논제 Ⅰ-(2)	<8점> 주어진 식이 최대가 되도록 하는 점 X의 위치를 설명한다. <8점> 평면벡터를 이해하여 $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}}$의 최댓값 $4\sqrt{3}$을 구한다.	16점

6. 2025학년도 논술고사 예시 답안

(1) 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 4이고, 점 P는 변 AD의 중점이므로 선분 PD의 길이는 2이다. 원 O_2의 반지름을 r라고 할 때, $\angle\mathrm{DPR}=\frac{\pi}{3}$, $\angle\mathrm{DPO_2}=\frac{\pi}{6}$이므로, 선분 PD의 길이는 $r(\sqrt{3}+1)$이고, 따라서 $r=\sqrt{3}-1$. 또한 세 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, D는 모두 한 직선 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\overline{\mathrm{O_1D}}-\overline{\mathrm{O_2D}}$이고, $\overline{\mathrm{O_1P}}=\overline{\mathrm{PD}}=2$로부터 직각이등변삼각형 $\mathrm{PO_1D}$에서 $\overline{\mathrm{O_1D}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{O_2D}}=r\sqrt{2}=(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{O_1O_2}}=2\sqrt{2}-(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$



(2) $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{QR} \cdot (\overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP}$이다. 이때, 정삼각형 PQR에서 $|\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{QP}| = 2\sqrt{3}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{QR}$와 $\overrightarrow{QP}$가 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}$이므로 $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = |\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{QP}|\cos\frac{\pi}{3} = 6$이다. 또한 두 벡터 $\overrightarrow{QR}$와 $\overrightarrow{QX}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QX} = |\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{QX}|\cos\theta = 2\sqrt{3}|\overrightarrow{QX}|\cos\theta$이다. 점 X를 직선 QR에 내린 수선의 발을 점 X′이라고 하면 $|\overrightarrow{QX}|\cos\theta$의 값은 선분 QX′의 길이이므로, 이 값이 최대가 되도록 하는 점 X는 원 O_2와 변 CD가 접하는 점이면 된다. 따라서 $|\overrightarrow{QX}|\cos\theta = \overline{QX'} = 2+\sqrt{3}$. 따라서 $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{PX}$의 최댓값은 $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 2\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) - 6 = 4\sqrt{3}$

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	(자연)계열 / (Ⅱ)문항

2. 2025학년도 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[나] 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>0, n>0)$으로

① 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

② 외분하는 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m \neq n$)

[다] 일반적으로 두 변수 x, y 사이의 관계가 변수 t를 매개로 하여 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타내어질 때, 변수 t를 x, y의 매개변수라 하고 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$를 매개변수로 나타낸 함수라고 한다.

[문항]

[논제 Ⅱ] 길이가 5인 막대가 좌표평면 위에서 움직인다. 막대의 한 쪽 끝점을 P, 다른 쪽 끝점을 R라 할 때, 선분 PR를 2:3으로 내분하는 막대 위의 점을 Q라 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, 막대는 변형되지 않고, 그 두께는 무시한다.)

(1) 점 P가 점 $(-4, 0)$에서 점 $(4, 0)$까지 x축을 따라 움직인다. 점 P가 움직이는 동안 점 Q는 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$을 따라 움직인다고 할 때, 점 R가 그리는 곡선을 나타내는 함수 $y=f(x)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (단, 점 P가 원점에 있을 때, 점 Q의 좌표는 $(0, 2)$이다.) (15점)

(2) (1)에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 $y=5-\dfrac{x^2}{a}$의 서로 다른 교점이 2개 이상이 되는 양수 a의 범위를 구하고 그 근거를 논술하시오. (18점)

3. 2025학년도 논술고사 출제 의도

[논제Ⅱ]에서는 고등학교 교육과정의 선분의 내분점과 외분점, 매개변수로 나타낸 함수, 이차곡선 등을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2025학년도 논술고사 문항 해설

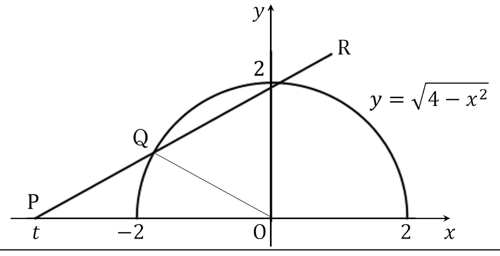
[논제Ⅱ]는 선분의 내분점과 외분점을 이해하여 매개변수로 나타낸 함수로부터 x좌표와 y좌표 사이의 관계식을 찾는 문제이다. 올바른 범위에서 두 함수의 그래프의 교점을 구하는 문제를 이차방정식의 근을 구하는 문제로 변환하는 능력을 평가한다.

5. 2025학년도 논술고사 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제Ⅱ-(1)	<5점> 점 Q의 좌표를 매개변수로 표현할 수 있다. <5점> 내분/외분점 개념을 이용하여 점 R의 좌표를 표현할 수 있다. <5점> 매개변수로 표현된 함수로부터 관계식 $y=5\sqrt{1-x^2}$ 을 유도할 수 있다.	15점
논제Ⅱ-(2)	<7점> 교점에 관한 이차방정식을 유도할 수 있다. <6점> 교점을 가지는 범위를 구할 수 있다. <5점> 교점의 개수를 확인할 수 있다.	18점

6. 2025학년도 논술고사 예시 답안

[논제 Ⅱ] (1) 점 Q가 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$ 위를 움직이고, 선분 PQ의 길이가 2이므로, 점 P가 x축을 따라 $(-4,0)$에서 $(4,0)$까지 움직일 때, 점 Q는 곡선 $y=\sqrt{4-x^2}$을 따라 $(-2,0)$에서 $(2,0)$까지 움직인다.



매개변수 $t(-4 \le t \le 4)$를 이용하여 점 P의 위치를 $\mathrm{P}(t, 0)$이라 하면, 점 Q의 위치는 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OQ}}$이므로 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t}{2}, \sqrt{4-\dfrac{t^2}{4}}\right)$이다. 점 R는 선분 PQ를 $5:3$으로 외분하는 점이므로 제시문 [나]에 의해 $\mathrm{R}\left(-\dfrac{t}{4}, \dfrac{5}{2}\sqrt{4-\dfrac{t^2}{4}}\right)$이다. 따라서 점 R의 x좌표와 y좌표 사이의 관계식은 $y = \dfrac{5}{2}\sqrt{4-4x^2}$ 으로부터 $y = 5\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \le x \le 1)$

(2) $y = 5 - \dfrac{x^2}{a}$에서 $x^2 = a(5-y)$를 $y = 5\sqrt{1-x^2}$에 대입하면 $y = 5\sqrt{1-5a+ay}$이다. 양변을 제곱하여 정리하면 $y^2 - 25ay + 125a - 25 = 0$이고
$y^2 - 25ay + 5(25a-5) = (y-5)(y-25a+5) = 0$이다. 따라서 $y=5$ 또는 $y = 25a-5$이다. $y=5$일 때는 교점 $(0, 5)$를 가진다. $y = 25a-5$일 때는 $y = 5\sqrt{1-x^2}$이 $-1 \le x \le 1$에서 $0 \le y \le 5$이므로 $0 \le 25a-5 \le 5$이고, 따라서 $\dfrac{1}{5} \le a \le \dfrac{2}{5}$이다. $a = \dfrac{2}{5}$이면 $y=5$가 되어서 교점이 $(0, 5)$이므로 서로 다른 교점을 갖기 위해서는 $\dfrac{1}{5} \le a < \dfrac{2}{5}$

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	(자연)계열 / (Ⅲ)문항

2. 2025학년도 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[라] 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

[마] 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} (a \neq 0)$은

① $|r| < 1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r| \geq 1$일 때, 발산한다.

[바] 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

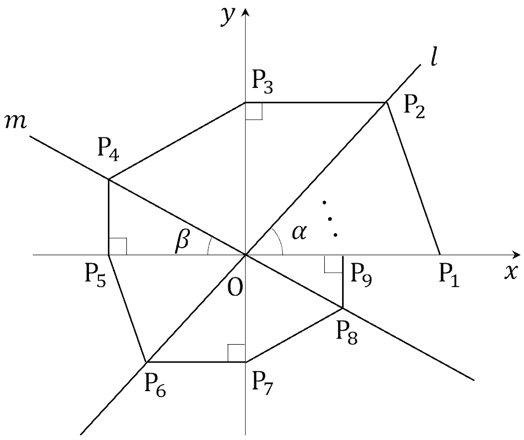
[사] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

[문항]

[논제 Ⅲ] <그림 2>와 같이 좌표평면 위에 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선 l과 기울기가 음수인 직선 m이 있다. (단, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) 점 $\mathrm{P}_1(1, 0)$에서 시작하여 제1사분면에서 $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{O} = \frac{\pi}{3}$인 직선 l 위의 점 P_2를 찾는다. 점 P_2에서 y축에 내린 수선의 발을 P_3, 제2사분면에서 $\angle \mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{O} = \frac{\pi}{3}$인 직선 m 위의 점 P_4를 찾는다. 점 P_4에서 x축에 내린 수선의 발을 P_5라 하자. 이와 같은 방법으로 하여, 시계 반대 방향으로 점 $\mathrm{P}_6, \mathrm{P}_7, \mathrm{P}_8, \mathrm{P}_9, \cdots$ 를 한없이 만들어 나갈 때, 다음 물음에 답하시오.



<그림 2>

(1) $\overline{\mathrm{OP}_5}$를 α와 β에 대한 식으로 정리하면

$$\overline{\mathrm{OP}_5}=A\sin(\alpha+B)\sin\alpha\cos(\beta+C)\cos\beta$$

일 때, 상수 A, B, C의 값을 각각 구하고 그 근거를 논술하시오. (단, $0<B<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<C<0$) (16점)

(2) $\beta=\frac{\pi}{6}$일 때, x축 위의 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_5, \mathrm{P}_9, \cdots$ 에 대하여, $\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{OP}_5}+\overline{\mathrm{OP}_9}+\cdots$ 의 합을 α에 대한 식으로 구하고, 이를 $f(\alpha)$라 하자. 이때, $f(\alpha)$의 증가와 감소의 표를 구하시오. 이를 이용하여 $f(\alpha)$가 최대가 되는 α의 값과, 그때의 최댓값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (21점)

3. 2025학년도 논술고사 출제 의도

고등학교 교육과정의 사인법칙, 등비급수, 삼각함수의 덧셈정리, 함수의 미분 등을 이해하여, 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2025학년도 논술고사 문항 해설

[논제Ⅲ]에서는 고등학교 교육과정의 사인법칙, 등비급수, 삼각함수의 덧셈정리, 함수의 미분 등을 이용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

5. 2025학년도 논술고사 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제Ⅲ-(1)	<10점> 제시문의 삼각함수의 성질을 이용하여, 선분의 길이에 대한 관계식을 구한다. <6점> $\overline{\mathrm{OP}_5}$를 제시한 식으로 정리하여, A, B, C의 값을 구한다.	16점
논제Ⅲ-(2)	<7점> 길이의 합이 등비급수임을 보인다. <7점> 등비급수의 첫째항과 공비를 구하고, 등비급수의 합을 구한다. <7점> 미분을 이용하여 $f(\alpha)$에 대한 증가와 감소의 표를 구하고, $f(\alpha)$가 최대일 때의 α와 그 최댓값을 구한다.	21점

6. 2025학년도 논술고사 예시 답안

(1) 삼각형 $\mathrm{OP_1P_2}$에서 사인법칙을 적용하여,

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}_2}}{\sin\left(\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\frac{\overline{\mathrm{OP}_1}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$ 이고, $\overline{\mathrm{OP}_2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\overline{\mathrm{OP}_1}$이다.

직각삼각형 $\mathrm{OP_3P_2}$에서 $\overline{\mathrm{OP}_3}=\sin\alpha\,\overline{\mathrm{OP}_2}$이다.

이와 같은 방법으로, α 대신 $\frac{\pi}{2}-\beta$를 사용하여 $\overline{\mathrm{OP}_3}$으로부터 $\overline{\mathrm{OP}_4}$와 $\overline{\mathrm{OP}_5}$는

$\overline{\mathrm{OP}_4}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta+\frac{\pi}{3}\right)\overline{\mathrm{OP}_3}$이고, $\overline{\mathrm{OP}_5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\overline{\mathrm{OP}_4}$이다.

위의 결과들과 $\overline{\mathrm{OP}_1}=1$을 모두 적용하면,

$$\overline{\mathrm{OP}_5}=\frac{4}{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

이때, 아래 등식들을 적용하여

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$,

$\overline{\mathrm{OP}_5}=\frac{4}{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha\cos\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)\cos\beta$이다.

따라서, $A=\frac{4}{3}, B=\frac{\pi}{3}, C=-\frac{\pi}{3}$이다.

(2) $\beta=\frac{\pi}{6}$이면, $\overline{\mathrm{OP}_5}=\overline{\mathrm{OP}_1}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha$이고,

삼각형 $\mathrm{OP_1P_2}$, $\mathrm{OP_5P_6}$, $\mathrm{OP_9P_{10}}, \cdots$ 들은 모두 닮음이고, 그 닮음비가 $\frac{\overline{\mathrm{OP}_5}}{\overline{\mathrm{OP}_1}}=\frac{\overline{OP_9}}{\overline{OP_5}}=\cdots$ 이

므로, $\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{OP}_5}+\overline{\mathrm{OP}_9}+\cdots$의 합은 첫째항이 $\overline{\mathrm{OP}_1}=1$이고

공비가 $r=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}_{4n+1}}}{\overline{\mathrm{OP}_{4n-3}}}=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\alpha$인 등비급수의 합이다. 따라서, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서 $|r|<1$

이므로 제시문 [마]에 의해 $f(\alpha)=\dfrac{1}{1-\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\alpha}$

이때, $f(\alpha)$를 미분하여 삼각함수의 덧셈정리를 적용하여 정리하면

$$f'(\alpha)=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\alpha}{\left(1-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha\right)^2}=\frac{\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\left(1-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha\right)^2}$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f(\alpha)$에 대하여 다음과 같이 증가와 감소의 표를 구할 수 있다.

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

따라서, $f(\alpha)$는 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$에서 최댓값 4를 갖는다.