2025학년도 모의논술고사[자연계]

1. 2025학년도 모의논술고사 예시답안

[논제 Ⅰ] (1) 삼각형 QFF'의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2c\times y_2 = cy_2$ 이다. 한편, 점 P에서 선분 QF에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼각형 PQF의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{QF}}$이다. 그런데, $\overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{(c-x_2)^2+y_2^2}$이고, 점 Q와 점 F를 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{-y_2}{c-x_2}(x-c)$이다. 따라서, 점과 직선사이의 거리공식에 의하여

$$\overline{\mathrm{PH}} = \frac{|y_2x_1+(c-x_2)y_1-y_2c|}{\sqrt{y_2^2+(c-x_2)^2}}$$

그러므로,

$$\triangle\mathrm{PQF} = \frac{1}{2}\times\sqrt{(c-x_2)^2+y_2^2}\times\frac{|x_1y_2-x_2y_1+c(y_1-y_2)|}{\sqrt{(c-x_2)^2+y_2^2}}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1+c(y_1-y_2)|$$

(2) $y_1=t$, $y_2=1$이므로, x_1과 x_2는 각각

$$x_1=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{b^2}t^2},\ x_2=-\sqrt{a^2+\frac{a^2}{b^2}}$$

따라서, 삼각형 PFF'의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2c\times t=ct$이고, 삼각형 PQF의 넓이는 (1)에 의해

$$\frac{1}{2}\left|\sqrt{a^2+\frac{a^2}{b^2}t^2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{b^2}}\,t+c(t-1)\right|$$

그러므로, 특히 $t>1$일 때,

$$R(t)=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\frac{a^2}{b^2}t^2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{b^2}}\,t+c(t-1)\right)}{ct}=\frac{\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+\frac{t^2}{b^2}}+a\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}\,t+c(t-1)\right)}{ct}$$

이고, 따라서

$$\lim_{t\to\infty}R(t)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+a\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+c\right)}{c}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2bc}+\frac{a}{2c}\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}$$

[논제 Ⅱ] (1) 한 변의 길이가 10인 정삼각형 BCD의 한 모서리 BC의 중점을 M이라고 하면, 선분 DM의 길이는 $\overline{\mathrm{DM}}=5\sqrt{3}$이다. 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이므로 선분 DM을 2:1로 내분하는 점이고, 따라서 $\overline{\mathrm{HM}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{DM}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

이때 $\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{HM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\angle\mathrm{AMH}=\theta$이고 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{HM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=5$이다.

따라서 직각삼각형 ABM에서 $\overline{\mathrm{AB}}=5\sqrt{2}$.

(2) 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{DH}}$이고, 선분 DM을 2:1로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{BH}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{DM}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$이다. (1)에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}=5\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(\frac{10\sqrt{6}}{3})^2}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

한편 사면체에 외접하는 구의 중심을 P라 하면, 사면체의 꼭짓점에서 구의 중심까지의 거리는 같아야 하므로 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$. 따라서 직각삼각형 PBH에서 $\overline{\mathrm{BH}}^2+(\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AH}})^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$이고, 구의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{AP}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

[논제 Ⅲ] (1) 직선 l_1의 방정식은 $y=2ax-a^2$이고, 직선 l_1의 x절편은 $\mathrm{Q}_1(\frac{a}{2},0)$이다. 따라서 넓이 A는

$$A=\int_0^a x^2dx-\int_{\frac{a}{2}}^a(2ax-a^2)dx=\frac{a^3}{12}$$

직선 m의 방정식은 $y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$이고, 점 P_2의 좌표를 구하기 위해 $-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}=x^2$을 풀면 $x=-a-\frac{1}{2a}$이고, 따라서 $\mathrm{P}(-a-\frac{1}{2a},(a+\frac{1}{2a})^2)$이다. 직선 l_2의 방정식은 $y=-2(a+\frac{1}{2a})x-(a+\frac{1}{2a})^2$이고, x절편은 $\mathrm{Q}_2(-\frac{a}{2}-\frac{1}{4a},0)$이므로, 넓이 B는

$$B=\int_{-a-\frac{1}{2a}}^0 x^2dx-\int_{-a-\frac{1}{2a}}^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{4a}}(-2(a+\frac{1}{2a})x-(a+\frac{1}{2a})^2)dx=\frac{1}{12}(a+\frac{1}{2a})^3$$

따라서 극한은 $\lim_{a\to 0}AB=\lim_{a\to 0}\frac{1}{144}(a^2+\frac{1}{2})^3=\frac{1}{1152}$

(2) 직선 l_3의 방정식은 $y=-\frac{1}{2b}x+b^2+\frac{1}{2}$이고, 이 직선이 $\mathrm{P}_1(a,a^2)$을 지나므로, $a^2=-\frac{a}{2b}+b^2+\frac{1}{2}$를 풀면, $a=b$ 또는 $a=-b-\frac{1}{2b}$이다. 이때 $a>0$이고 $b<0$이므로, $a=-b-\frac{1}{2b}$이고, 이를 정리하면 $2b^2+2ab+1=0$을 얻는다. 직선 l_4에 대해서도 같은 방법으로 $2c^2+2ac+1=0$을 얻는다. 따라서 b와 c는 이차방정식 $2x^2+2ax+1=0$의 두 실근이고, 근과 계수와의 관계에 의해 $b+c=-a$, $bc=\frac{1}{2}$이다. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}}=(b-a,b^2-a^2)$와 $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_4}}=(c-a,c^2-a^2)$의 내적은

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1P_4}}=(b-a)(c-a)+(b^2-a^2)(c^2-a^2)=(a^2-(b+c)a+bc)\{1+a^2+(b+c)a+bc\}$$

따라서 근과 계수와의 관계에 의해 $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1P_4}}=3a^2+\frac{3}{4}$이고, 주어진 조건에 의해 $a=2$이다. 따라서 $b+c=-2$이다.

2. 2025학년도 모의논술고사채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제 I	(1) • 삼각형 QFF'의 넓이를 구함. (4점) • 삼각형 PQF의 넓이를 구함. (10점) (2) • 삼각형 PFF'의 넓이를 구함. (3점) • 삼각형 PQF의 넓이를 구함. (3점) • $R(t)$를 올바르게 구함. (3점) • $\lim_{t\to\infty} R(t)$를 올바르게 구함. (7점) • 답안에 c 대신 $\sqrt{a^2+b^2}$을 사용해도 정답으로 인정	30
논제 II	(1) • 선분 HM의 길이를 구함. (8점) • 선분 AB의 길이를 구함. (8점) (2) • 선분 AH의 길이를 구함 (8점) • 구의 중심 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 를 이용, 직각삼각형 PBH로부터 반지름을 구함 (9점)	33
논제III	(1) • 접선을 구하고, 그것에 수직인 직선을 구함. (6점) • 정적분을 활용하여 넓이를 구함. (6점) • 극한을 계산함. (6점) (2) • 주어진 조건으로부터 a, b, c의 관계를 구함. (9점) • 내적 $\overrightarrow{P_1P_3}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$를 구함. (6점) • $a=2$를 찾고, 이를 이용하여 $b+c$를 구함. (4점)	37

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

3. 2025학년도 모의논술고사문항 출제근거-자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	이준열 외 7인	천재교육	2023	27, 119, 144
	수학II	류희찬 외 10인	㈜천재교과서	2023	67
	수학	박교식 외 19인	동아출판(주)	2022	120, 123
기타					

4. 2025학년도 모의논술고사문항 해설

[논제 Ⅰ]에서는 점과 직선 사이 거리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하고, 넓이의 비에 대한 극한값을 구하여, 기하학적인 상황을 잘 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[논제 Ⅱ]에서는 고등학교 교육과정의 공간도형과 공간좌표의 기본 개념을 종합적으로 이해하고, 직선과 평면의 위치 관계와 구의 성질을 응용할 수 있는지 파악할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[논제 Ⅲ]에서는 곡선의 접선과 두 직선이 수직이기 위한 조건 등을 이용하여 주어진 영역을 수학적으로 표현하고, 적분을 활용하여 그 영역의 넓이를 구할 수 있는지, 그리고 이러한 상황에서 극한과 벡터 등의 개념을 종합적으로 응용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.