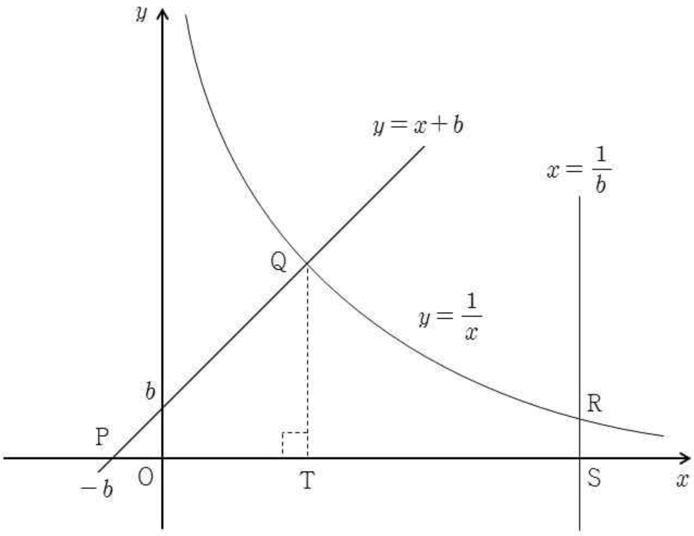
2024학년도 모의논술고사[의·약학계-수학]

1. 2024학년도 모의논술고사 예시답안

[논제 I-1] 좌표평면 위에 세 개의 직선 $y=x+b$, $x=\frac{1}{b}$, $y=0$과 곡선 $y=\frac{1}{x}$을 그리고, 둘러싸인 영역을 생각하면 다음과 같다. 이 영역은 다음과 같이 점 P, Q, R, S를 잇는 선분 및 곡선으로 둘러싸여 있다.



(1) 삼각형 PQT의 넓이를 구하기 위해 점 Q의 x좌표를 구하면, $x+b=\frac{1}{x}$로부터 $x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}$를 얻는다. 삼각형 PQT는 직각이등변삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}+b\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^2$이다. 점 Q와 R을 잇는 곡선 아래 영역의 넓이를 구하기 위해 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$를 적분하면,

$\int_{\frac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}}^{\frac{1}{b}}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{1}{b}-\ln\frac{-b+\sqrt{b^2+4}}{2}=\ln\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2b}$를 얻는다. 따라서, 넓이 $B(b)$는

$B(b)=\frac{1}{2}\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^2+\ln\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2b}$ 이고,

$B(b)+\ln b=\frac{1}{2}\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^2+\ln\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2b}+\ln b=\frac{1}{2}\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^2+\ln\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}=\frac{1}{2}t^2+\ln t$이다. 따라서, $f(t)=\frac{1}{2}t^2+\ln t$이고, $\lim_{t\to 1+}f(t)=\frac{1}{2}$이다.

(2) (1)에서 구한 $B(b)$를 이용하면, $B(b)-\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}+\frac{b\sqrt{b^2+4}-b^2}{4}+\ln\frac{t}{b}=\frac{1}{2}+\frac{b}{2t}+\ln\frac{t}{b}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}+\ln s$이다. 따라서, $g(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}+\ln s$이고, $\lim_{s\to 1+}g(s)=1$이다. $2\le s\le 3$에서 $g(s)$의 최댓값을 구하기 위해 극댓값 또는 극솟값을 조사하면, $g'(s)=-\frac{1}{2s^2}+\frac{1}{s}=\frac{-1+2s}{2s^2}>0$이므로 $2\le s\le 3$에서 극값을 가지지 않는다. 또한, $2\le s\le 3$에서 함수 $g(s)$는 증가하므로, 최댓값은 $g(3)=\frac{2}{3}+\ln 3$이다.

[논제 I-2] 주어진 식 $k\overrightarrow{O'A}=\overrightarrow{O'B}+3\overrightarrow{O'C}$는 다음과 같이 쓸 수 있고,

$$k(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OB})+3(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OC})$$

위의 식에 $\overrightarrow{O'O}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$을 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{k}{2}+2\right)\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC} \qquad \text{-------------(가)}$$

(1) 식-(가)의 양변을 제곱하면 다음과 같다.

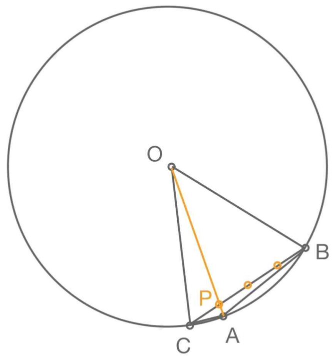
$$\frac{1}{4}(k+4)^2|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+6(\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC})+9|\overrightarrow{OC}|^2$$

따라서 $\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}=\frac{1}{24}(k+4)^2-\frac{5}{3}$이고, $-3\le k\le 3$의 범위에 따라 $\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}$의 최댓값은 $k=3$일 때 $\frac{49}{24}-\frac{5}{3}=\frac{3}{8}$이다.

(2) 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각을 θ라 하자. 다음의 식

$$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta$$

에 위에서 구한 $\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}$ 의 최댓값 $\frac{3}{8}$을 대입하면 다음의 값을 얻을 수 있다.



$$\cos\theta=\frac{3}{8},\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{55}}{8}$$

따라서 삼각형 OBC의 넓이는 $\triangle OBC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\sin\theta=\frac{\sqrt{55}}{16}$이다.

위에서 구한 $k=3$을 식-(가)에 대입하면

$$\frac{7}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}\ \left(\text{즉, } \frac{7}{8}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}\right)$$

이므로, 선분 CB 위의 한 점 P를 $|\overrightarrow{CP}|:|\overrightarrow{PB}|=1:3$을 만족하도록 찾을 수 있다. 즉, $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$이기 때문에 $\overrightarrow{OP}=\frac{7}{8}\overrightarrow{OA}$임을 알 수 있다. 따라서 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{1}{7}|\overrightarrow{OP}|$이고,

$$\triangle ABC=\frac{1}{7}\triangle OBC=\frac{\sqrt{55}}{112}$$

2. 2024학년도 모의논술고사문항 해설(출제범위 포함)

[논제 I-1]에서는 유리함수, 이차방정식의 적분, 함수의 극한을 이해하고, 여러 가지 미분법, 도함수를 활용하여 함수의 최댓값과 문제에서 요구하는 값을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다.
[논제 I-2]에서는 평면벡터의 내적과 두 평면벡터가 이루는 각을 이해하고, 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이와 문제에서 요구하는 값을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분	권오남 외 14인	㈜교학사	2021	173
	고등학교 수학II	박교식 외 19인	동아출판(주)	2023	91
	고등학교 수학I	류희찬 외 10인	천재교과서	2023	105
	고등학교 기하	류희찬 외 9인	천재교과서	2022	90
기타					