2024학년도 모의논술고사[자연계]

1. 2024학년도 모의논술고사 예시답안

[논제 I]

(1) 경희가 상자에서 흰 공을 꺼낼 확률을 p라고 하면 $p=\frac{n}{60}$이다.

$P(A)=p\times p\times(1-p)+p\times(1-p)\times p+(1-p)\times p\times p=3p^2(1-p)$

$P(A\cap B)=p\times p\times(1-p)+p\times(1-p)\times p=2p^2(1-p)$

따라서, 조건부 확률에 정의로부터 $P(B|A)=\frac{2}{3}$

(2) (1)과 비슷하게 3번째 공을 뽑고 난 후,

$X=600$원일 확률은 p^3

$X=400$원일 확률은 $3p^2(1-p)$

$X=200$원일 확률은 $3p(1-p)^2$

$X=0$ 원일 확률은 $(1-p)^3$

따라서, 기댓값의 정의로부터

$E[X]=600\times p^3+400\times 3p^2(1-p)+200\times 3p(1-p)+0\times(1-p)^3=200.$

즉, $6p^3+12p^2(1-p)+6p(1-p)-2=0.$

이 방정식을 풀면 $p=\frac{1}{3}$. 따라서 $n=20$이다.

[논제 II]

(1) 부분적분법을 이용하면,

$\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\sin x+C$

$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$

(2) $f(x)=x\sin x$ 라 두고, 이 함수의 부정적분 중 하나를 $F(x)=-x\cos x+\sin x$ 라 하면, $F'(x)=f(x)$ 이다. 이를 이용하면, 다음과 같이 부분적분법으로 계산할 수 있다.

$\int x^2\sin x\,dx=\int x f(x)\,dx=\int xF'(x)\,dx=xF(x)-\int F(x)\,dx$

위에서 $F(x)$의 부정적분은 $x\cos x$의 부정적분의 결과를 이용하여,

$\int F(x)\,dx=\int -x\cos x+\sin x\,dx=-x\sin x-\cos x-\cos x+C$ 이다.

따라서,

$\int x^2\sin x\,dx=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

위의 함수를 $G(x)=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$ 라 두고 이 중에서 닫힌구간 $[0,2\pi]$에서 x축과 만나지 않는 함수들을 구하기 위하여, 함수의 그래프의 개형을 증가와 감소의 표를 이용하여 구해보면,

x	0		π		2π
$G'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$G(x)$	$2+C$	↗	$(\pi^2-2)+C$	↘	$(2-4\pi^2)+C$

함수의 그래프가 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 x축과 만나지 않기 위해서는 최댓값과 최솟값의 부호가 같아야 한다.
따라서 $(\pi^2-2+C)(2-4\pi^2+C)>0$ 인 다음 부정적분 함수들에 대하여 x축과 만나지 않는다.
$G(x)=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C,\quad C<2-\pi^2$ 혹은 $C>4\pi^2-2$.

[논제 III]

(1) 삼각형 PF′F의 외접원의 중심 A는 점 F와 점 F′에서 부터의 거리가 같아야 하므로, 선분 F′F의 수직이등분선, 즉 y축 위에 있어야 한다. 따라서 $k=0$이고, $\mathrm{A}(0, l)$로 둘 수 있다. 한편, $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AP}}$이므로,

$$\sqrt{c^2+l^2}=\sqrt{(l-q)^2+p^2}$$

이다. 이를 풀면, $l=\dfrac{p^2+q^2-c^2}{2q}=\dfrac{\frac{a^2}{b^2}q^2+a^2+q^2-c^2}{2q}=\dfrac{c^2q^2-b^4}{2b^2q}$가 된다.

따라서, $q>0$이므로, A의 y좌표 l이 양수이기 위한 q의 조건은 $q>\dfrac{b^2}{c}$가 된다.

(2) q가 양의 무한대로 발산하는 극한을 구해야 하므로, 일반성을 잃지 않고, $q>\dfrac{b^2}{c}$인 경우를 생각해도 충분하다. 이때, 원점을 O라 하면, 원주각과 중심각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{FAO}=\beta$, $\angle\mathrm{PAF}=2\alpha$이므로 $\angle\mathrm{PAO}=2\alpha+\beta$가 된다. 따라서, 구하고자 하는 극한은

$$\lim_{y\to\infty}\cos(\angle\mathrm{PAO})$$

이다. 그런데, 점 P의 y좌표와 점 A의 y좌표의 차이를 계산해보면,

$$q-\frac{c^2q^2-b^4}{2b^2q}=\frac{(b^2-a^2)q^2+b^4}{2b^2q}$$

이다. 따라서, 주어진 조건대로 $a>b>0$이면, $q>\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$일 때 A의 y좌표가 P의 y좌표보다 크다. 따라서, 충분히 큰 q에 대해 $\angle\mathrm{PAO}$는 예각이다. 따라서 이 경우에는

$$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{A}\text{의 }y\text{좌표}-\mathrm{P}\text{의 }y\text{좌표}}{\overline{\mathrm{AP}}}$$

이므로,

$$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{(a^2-b^2)q^2-b^4}{2b^2q}}{\sqrt{p^2+\left(\dfrac{(b^2-a^2)q^2+b^4}{2b^2q}\right)^2}}=\frac{\dfrac{(a^2-b^2)q^2-b^4}{2b^2q}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}q^2+a^2+\left(\dfrac{(b^2-a^2)q^2+b^4}{2b^2q}\right)^2}}$$

이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{q\to\infty}\cos(2\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{\frac{a^2}{b^2}-1}{\frac{a^2}{b^2}+1}$ 이고,

$$f(t)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

이다. 그러므로, 구하고자 하는 부정적분은

$$\int tf(t)\,dt=\int t\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=\int t\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\log(1+t^2)+C$$

이다.

2. 2024학년도 모의논술고사문항 해설(출제범위 포함)

[논제 I]에서는 조건부확률의 의미를 이해하는가, 확률변수의 뜻을 알고 이를 이용하여 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있는가를 물어보고자 하였다.
[논제 II]에서는 부분적분을 활용하여 제시한 부정적분을 구할 수 있는가, 미분과 적분의 관계를 이해하여 함수의 증가와 감소를 파악하고, 함수의 그래프의 개형을 이용하여 제시한 문제를 해결할 수 있는가를 물어보고자 하였다.
[논제 III]에서는 원과 쌍곡선의 성질들에 대한 기본적인 이해를 바탕으로, 삼각함수 값의 극한 및 도출된 식의 부정적분을 계산하는 미적분과 기하에 대한 종합적인 문제 해결 능력을 평가하고자 하였다.

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 확률과 통계	홍성복 외	지학사	2023	64
	고등학교 확률과 통계	홍성복 외	지학사	2023	87
	고등학교 수학II	고성은 외	좋은책신사고	2021	114
	고등학교 미적분	이준열 외	천재교육	2022	155
	고등학교 수학II	고성은 외	좋은책신사고	2021	81
	고등학교 기하	이준열 외	천재교육	2020	27
	고등학교 미적분	이준열 외	천재교육	2020	133