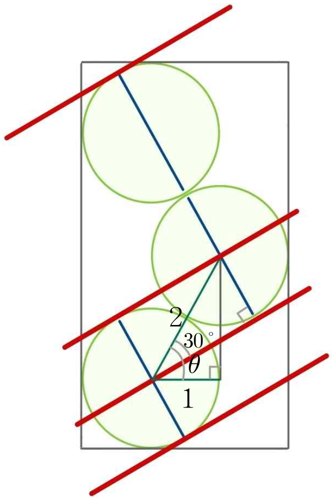
2023학년도 모의논술고사[의·약학계-수학]

1. 2023학년도 모의논술고사 예시답안

[논제 I-1] 공 세 개가 들어있는 투명 직육면체를 정면에서 바라보면 다음 그림과 같다. 붉은 선은 태양광선을 뜻한다.

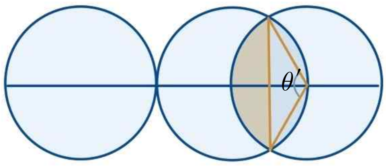
<그림 1>



(1) 초록색 선에 의해서 만들어진 직각삼각형의 빗변의 길이가 2, 밑변의 길이가 1이므로 각 θ는 60°임을 알 수 있다. 직육면체의 높이는 $2+2\sqrt{3}$.

(2) 태양광선 방향에서 본 공의 모양은 다음과 같다.

<그림 2>



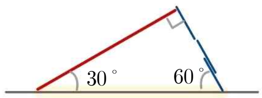
단면의 넓이를 구하기 위해 세 원의 넓이에서 두 원이 겹쳐진 부분의 넓이, 즉, 주황색으로 색칠된 곳의 넓이를 구해서 2배 후 빼면 된다. <그림 2>의 부채꼴의 사잇각 θ'는 <그림 1>으로부터 $\theta' = 2\theta = 120^\circ$임을 확인할 수 있다. 색칠된 부분의 넓이는 반지름이 1이고, 사잇각이 120°인 부채꼴의 넓이에서 주황색 삼각형(두 변의 길이가 1이고 그 사잇각이 120°인 삼각형)의 넓이를 빼서 구할 수 있다.

$$\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

따라서 <그림 2>의 단면의 넓이는 $3\pi - 2(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{7}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$이고, 마지막으로 <그림 3>과 같이 (푸른 색 선으로 표현된) 단면의 넓이로부터 지면에 드리워진 그림자의 넓이를 구할 수 있다.

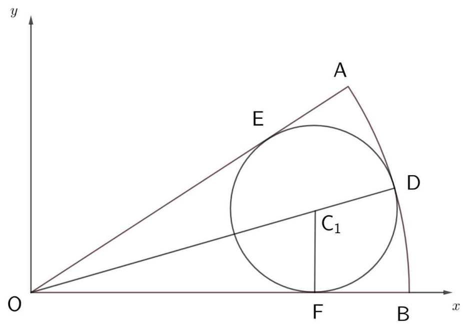
$$(\frac{7}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}) \div \cos\frac{\pi}{3} = \frac{14}{3}\pi + \sqrt{3}.$$

<그림 3>

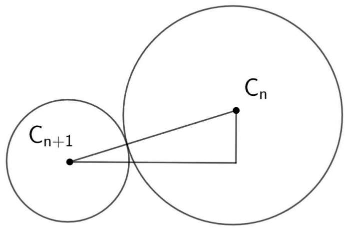


[논제 I-2]

(1) 중심이 C_1인 원이 부채꼴과 접하는 점들을 그림과 같이 각각 D,E,F라 하면, 선분 OC_1의 연장선과 호 $\widehat{AB}$가 D에서 만난다.



$\overline{C_1D}=\overline{C_1F}=r_1$이고, $\angle BOD=\theta$이므로, 삼각형 C_1OF에서 $\sin\theta=\dfrac{\overline{C_1F}}{\overline{OC_1}}=\dfrac{r_1}{1-r_1}$을 만족하므로, $r_1=\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$가 된다.



자연수 n에 대해서, 중심이 C_{n+1}인 원은 중심이 C_n인 원과 접하므로, $\sin\theta=\dfrac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}$을 만족한다. 따라서, $r_{n+1}=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_n$을 만족한다. 중심이 C_n인 원의 넓이를 A_n이라 하면, 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\pi r_1^2=\pi\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$이고

공비가 $\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$인 등비수열이 된다.

따라서, 모든 원의 넓이의 합은 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\dfrac{\pi\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}=\dfrac{\pi}{4}\sin\theta$가 된다.

(2) 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 r_1이고 공비가 $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$인 등비수열이므로, $r_n=r_1\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{n-1}=\dfrac{\sin\theta(1-\sin\theta)^{n-1}}{(1+\sin\theta)^n}$이다. 따라서, $r_{100}=\dfrac{\sin\theta(1-\sin\theta)^{99}}{(1+\sin\theta)^{100}}=f(\theta)$이다.

$x=\sin\theta$라 하고, $g(x)=\dfrac{x(1-x)^{99}}{(1+x)^{100}}$라 하면, $f(\theta)=g(\sin\theta)$이다. 그러면, $f'(\theta)=g'(\sin\theta)\cos\theta$이고, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로, $f'(\theta)=0$이면 $g'(\sin\theta)=0$이다. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $x=\sin\theta$는 $0<x<1$을 만족하므로, $g'(x)=0$이 되는 x를 계산하자.

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x(1-x)^{99}}{(1+x)^{100}}\right)=\frac{((1-x)^{99}-99x(1-x)^{98})(1+x)^{100}-100x(1-x)^{99}(1+x)^{99}}{(1+x)^{200}}$$

가 되어 이를 정리하면, $g'(x)=\dfrac{(1-x)^{98}\{(1+x)(1-100x)-100x(1-x)\}}{(1+x)^{101}}=\dfrac{(1-x)^{98}\{1-199x\}}{(1+x)^{101}}$

가 된다. $\sin\theta=\dfrac{1}{199}$를 만족하는 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$는 $\sin\theta$가 증가함수이므로 유일하게 존재하고, 이를 θ_0

이라 하자. $\theta < \theta_0$이면, $f'(\theta) > 0$이고, $\theta > \theta_0$이면, $f'(\theta) < 0$이므로, $f(\theta)$는 $\theta = \theta_0$에서 극댓값을 갖고 이는 최댓값이 된다.

즉, r_{100}은 $\sin\theta = \dfrac{1}{199}$일 때 최대가 된다. 이때, $r_1 = \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta} = \dfrac{\frac{1}{199}}{1+\frac{1}{199}} = \dfrac{1}{200}$이 된다.

2. 2023학년도 모의논술고사문항 해설(출제범위 포함)

[논제 I-1]에서는 공간에서 점, 직선, 평면 사이의 위치 관계를 알고, 정사영의 개념을 이해하는지 평가하고자 하였다. [논제 I-1]-(1)에서는 구와 좌표공간의 위치관계를 파악해 한 점에서 만날 때 (접할 때) 구의 반지름을 활용하여, 삼각함수와 피타고라스 정리를 이용할 수 있는지 문제 해결 능력을 평가하고자 하였다. [논제 I-1]-(2)에서는 평면 위에 있는 도형(단면)의 넓이를 계산하고, 단면의 넓이와 정사영의 넓이 사이의 관계를 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는지 평가하고자 하였다.
[논제 I-2]에서는 주어진 상황을 삼각비, 등비급수, 도함수의 성질을 이용하여 문제에서 요구하는 값을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다. [논제 I-2]-(1)에서는 닮음비와 삼각비를 이용하여 요구하는 원의 반지름을 구한 후, 등비급수의 합을 정확하게 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다. [논제 I-2]-(2)에서 삼각비를 통하여 구한 함수의 도함수를 이용하여 극댓값을 구할 수 있는지를 평가하고자 하였다.