2022학년도 모의논술고사[자연계]

1. 2022학년도 모의논술고사 예시답안

[논제 I](1)

임의의 실수 p,q에 대하여 $(p-q)^2 \geq 0$에서 $2pq \leq p^2+q^2$ 이고 등호는 $p=q$에서 성립한다. $p=ax, q=120\dfrac{y}{a}$을 대입하면, $240xy \leq a^2x^2+120^2\dfrac{y^2}{a^2}$에서

$100x^2+240xy \leq (100+a^2)x^2+120^2\dfrac{y^2}{a^2}$이다.

$100+a^2=\dfrac{120^2}{a^2}$이 되도록 하는 a^2을 찾으면 $a^2=\dfrac{-100+\sqrt{100^2+4\times 120^2}}{2}$이고

$100x^2+240xy \leq \dfrac{100+\sqrt{100^2+4\times 120^2}}{2}(x^2+y^2)=180$이다.

따라서 $100x^2+240xy$의 최댓값은 180이다.

[논제 I](2)

함수 $g(x)$를 미분하면 $g'(x)=12e^{3x}+2ae^{2x}+be^{x}$이고, 주어진 조건(가) $g'(x)=e^{4x}g'(-x)$로부터 $12e^{3x}+2ae^{2x}+be^{x}=e^{4x}(12e^{-3x}+2ae^{-2x}+be^{-x})=12e^{x}+2ae^{2x}+be^{3x}$를 얻는다.
변수 x에 1을 대입하면 $12e^{3}+2ae^{2}+be=12e+2ae^{2}+be^{3}$이 되고, $b=12$임을 알 수 있다.
그래서, $g(x)=4e^{3x}+ae^{2x}+12e^{x}+c$이다.
$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(4e^{3x}+ae^{2x}+12e^{x}+c)=c$이므로 조건(나) $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-9a$로부터
$c=-9a$이다.
조건(다) 함수 $g(x)$가 최소한 하나의 극값을 가져야 하기에 도함수
$g'(x)=12e^{3x}+2ae^{2x}+12e^{x}$가 부호가 바뀌는 근을 가진다.
$A=e^{x}$라 하면 함수 $12A^{3}+2aA^{2}+12A=2A(6A^{2}+aA+6)$가 중근이 아닌 양의 근을 가져야 한다. $A>0$이므로 이차함수 $y=6A^{2}+aA+6$가 중근이 아닌 양의 근을 가져야 한다.
판별식 $a^{2}-4\cdot6\cdot6>0$이므로, $|a|>12$이다. 양의 근을 가지기 위하여 꼭짓점의 A좌표가 양수이므로, $a<0$이다. 이로부터 $a<-12$이다.
함수 $h(x)=g(x)-2(a^{2}+6)e^{x}=4e^{3x}+ae^{2x}-2a^{2}e^{x}-9a$이고
$h'(x)=12e^{3x}+2ae^{2x}-2a^{2}e^{x}=2e^{x}(6e^{2x}+ae^{x}-a^{2})=2e^{x}(3e^{x}-a)(2e^{x}+a)$이다.
$a<0$이므로 $e^{x}=-\frac{a}{2}$, 즉 $x=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$만 근이 된다.
$h'(x)$가 $x=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$에서 음에서 양으로 부호가 바뀌므로 $h(x)$는 $x=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$에서 최소이고,
$h\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)=4\left(-\frac{a}{2}\right)^{3}+a\left(-\frac{a}{2}\right)^{2}-2a^{2}\left(-\frac{a}{2}\right)-9a=\frac{3}{4}a^{3}-9a$가 최솟값이다.
함수 $k(a)=\frac{3}{4}a^{3}-9a$라 하면, $k'(a)=\frac{9}{4}a^{2}-9=\frac{9}{4}(a^{2}-4)$이다.
$a<-12$에서 $k'(a)$의 부호가 항상 양이므로 $k(a)$는 증가함수이다. $a<-12$에는 끝점이 포함되지 않으므로 $k(a)$는 최댓값을 가지지 않는다.
그래서 함수 $h(x)$의 최솟값이 최대가 되는 a는 없다.

[논제 2](1)

a의 값에 따라 서로 다른 2개의 정수해를 갖는 경우는 다음과 같다.

가) $a=0$: $x^2-1=(x-1)(x+1)=0$, $x^2-4=(x-2)(x+2)=0$

나) $a=1$: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$

다) $a=2$: $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$

라) $a=3$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$, $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)=0$

마) $a=4$: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$, $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$

바) $a=5$: $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$

따라서 서로 다른 2개의 정수해를 갖는 경우의 수는 9이다.

[논제 2](2)

상자 B에 들어있는 수는 모두 소수이다. 따라서 $bc=p$ 또는 $bc=-p$라고 할 수 있다.

이때 이차방정식을 인수분해하여 나타낼 수 있는 경우는 다음 4가지가 있다.

$(x-1)(x-p)=x^2-(p+1)x+p=0$, $(x+1)(x+p)=x^2+(p+1)x+p=0$

$(x-1)(x+p)=x^2-(1-p)x-p=0$, $(x+1)(x-p)=x^2-(p-1)x-p=0$

x의 계수가 음수이므로 가능한 경우는 다음 2가지이다.

$(x-1)(x-p)=x^2-(p+1)x+p=0$, $x=1$ 또는 $x=p$

$(x+1)(x-p)=x^2-(p-1)x-p=0$, $x=-1$ 또는 $x=p$

상자 B의 3 이상 13 이하의 소수 p에 대해 상자 A에 $p-1$, $p+1$이 있고,

2에 대해 3은 있고, 1은 없고, 17에 대해 16은 있고, 18은 없으며,

19에 대해 18, 20 모두 없다.

그러므로 서로 다른 2개의 정수해를 갖는 경우의 수는 $1+5\times2+1=12$이다.

그리고 상자 A, B, C에서 공을 각각 임의로 1개씩의 공을 꺼내는 경우의 수는

$15\times8\times2=240$이다.

따라서 서로 다른 2개의 정수해를 가질 확률은 $\dfrac{1+5\times2+1}{15\times8\times2}=\dfrac{1}{20}$이다.

[논제 3](1)

이등변삼각형들이 서로 합동이므로 S_n = 삼각형$A_1B_1A_2$의 넓이 × n이다.

삼각형 $A_1B_1A_2$은 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_1}=a$이고 $\overline{A_1A_2}=\frac{a}{n}$인 이등변삼각형이므로, 각$A_1B_1A_2$를 θ라 하면, 사인법칙에 의해 $\frac{\frac{a}{n}}{\sin\theta}=\frac{a}{\sin\frac{\pi-\theta}{2}}$ 이고, $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2n}$이다.

또한 선분A_1A_{n+1}의 길이가 a이므로 $0<\theta\le\frac{\pi}{3}$이고,

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\frac{1}{2n}\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}=\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n^2}$$ 이다.

삼각형 $A_1B_1A_2$의 넓이$=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}\ \overline{A_2B_1}\sin\theta=a^2\frac{\sqrt{4n^2-1}}{4n^2}$이고, 따라서

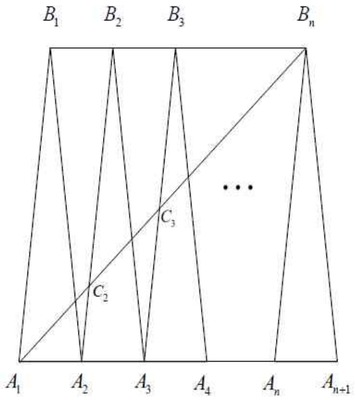
$S_n=a^2\frac{\sqrt{4n^2-1}}{4n}$이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a^2}{2}$이다.

[논제 3](2)

오른쪽 그림과 같이 각각의 $i=1, 2, \cdots, n-1$에 대하여, 선분A_1B_n과 선분A_iB_i가 만나는 점을 C_i라 하면(단, $C_1=A_1$) 삼각형$A_1B_1B_n$과 삼각형$C_iB_iB_n$은 닮은 삼각형이므로 닮음비에 의하여 $\overline{A_1B_1} : \overline{B_1B_n} = \overline{B_iC_i} : \overline{B_iB_n}$이다.

또한 $\overline{A_1B_1}=a$, $\overline{B_iB_{i+1}}=\dfrac{a}{n}$ 이므로, $\overline{B_1B_n}=\dfrac{n-1}{n}a$,

$\overline{B_iB_n}=\dfrac{n-i}{n}a$이다. 이로부터 $\overline{B_iC_i}=\dfrac{n-i}{n-1}a$이다 $\cdots$(a)

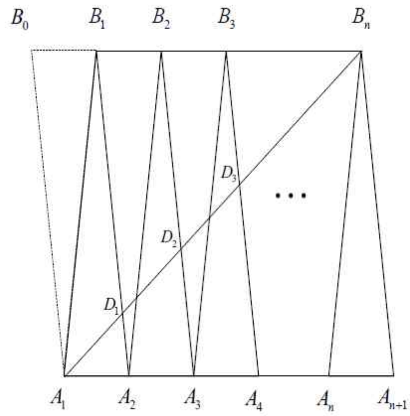


오른쪽 그림과 같이 $i=1, 2, \cdots, n-1$에 대하여 선분A_1B_n과 선분$A_{i+1}B_i$가 만나는 점을 각각 D_i라 하자. 또한 점 A_1을 지나고 선분A_2B_1과 평행한 직선이 선분B_1B_n의 연장선과 만나는 점을 B_0라 하자. 각 $i=1, 2, \cdots, n-1$에 대하여 삼각형$A_1B_0B_n$과 삼각형$D_iB_iB_n$은 닮은 삼각형이므로 닮음비에 의하여

$\overline{A_1B_0} : \overline{B_0B_n} = \overline{B_iD_i} : \overline{B_iB_n}$이다.

또한 삼각형$A_1B_0B_1$과 삼각형$A_2B_1B_2$는 합동인 삼각형이므로 $\overline{A_1B_0}=a$이고 $\overline{B_0B_n}=a$이다.

$\overline{B_iB_n}=\dfrac{n-i}{n}a$이므로 $\overline{B_iD_i}=\dfrac{n-i}{n}a$이다$\cdots$(b)



한편, [논제 3](1)에서 각$A_1B_1A_2$를 θ라 하면 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{4n^2-1}}{2n^2}$이므로, (a), (b)에 의하여

$$\text{삼각형}B_iC_iD_i\text{의 넓이}=\frac{1}{2}\overline{B_iC_i}\,\overline{B_iD_i}\sin\theta=\frac{1}{2}\frac{n-i}{n-1}a\times\frac{n-i}{n}a\times\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n^2}$$

$$=\frac{a^2\sqrt{4n^2-1}}{4n^3(n-1)}(n-i)^2\text{이다.}$$

따라서 $$T_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a^2\sqrt{4n^2-1}}{4n^3(n-1)}(n-i)^2=\frac{a^2\sqrt{4n^2-1}}{4n^3(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2$$

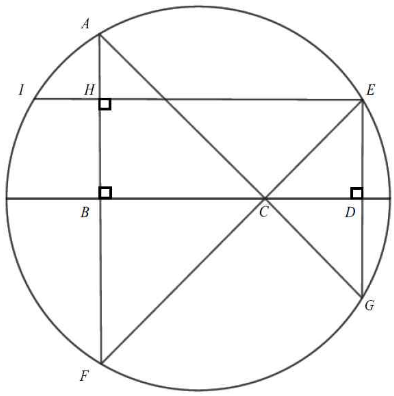
$$=\frac{a^2\sqrt{4n^2-1}}{4n^3(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}i^2=\frac{a^2\sqrt{4n^2-1}}{4n^3(n-1)}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{(2n-1)\sqrt{4n^2-1}}{24n^2}a^2$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\sqrt{4n^2-1}}{24n^2}a^2=\frac{a^2}{6}\text{이다.}$$

[논제 4](1)

대칭성에 의해 $\overline{AB} \geq \overline{DE}$일 때를 생각하면 충분하다.



오른쪽 그림과 같이 반원의 호를 연장하여 얻은 원에 대하여, 선분AC의 연장선이 원과 만나는 점을 G, 선분CE의 연장선이 원과 만나는 점을 F라 하자. 점 E를 지나고 선분CD에 평행한 직선이 선분AB와 만나는 점을 H, 이 직선이 원과 만나는 또 하나의 점을 I 라 하자.

삼각형AFI와 삼각형EFI는 원에 내접하고 변FI를 공통으로 가지고 있으므로 $\angle IAF = \angle IEF = \frac{\pi}{4}$이다. 따라서 삼각형$AHI$ 는 $\angle AHI = \frac{\pi}{2}$이고 $\angle IAH = \frac{\pi}{4}$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH} = \overline{HI}$이다.

$\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{CD} = \overline{DE} = b$라 하면, $\overline{HI} = \overline{AH} = a - b$, $\overline{EH} = a + b$이므로 $\overline{EI} = 2a$이고, $\overline{EG} = 2b$이다. 또한 $\angle IEG = \frac{\pi}{2}$이므로, 삼각형$IEG$는 원에 내접하는 직각삼각형이다.

따라서 선분GI는 원의 중심을 지나므로 $\overline{GI} = 2r$이며, $(\overline{EI})^2 + (\overline{EG})^2 = (\overline{GI})^2$이다. 따라서 $a^2 + b^2 = r^2$이고, 두 삼각형의 넓이의 합은 $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{r^2}{2}$으로 항상 일정하므로, 두 삼각형의 넓이의 합의 최댓값은 $\frac{r^2}{2}$이다.

[논제 4](2)

[논제 4](1)에서 $a^2 + b^2 = r^2$이고 $a, b \geq 0$이므로 $a = \sqrt{r^2 - b^2}$이다. 따라서 두 삼각형의 둘레의 길이의 합을 b로 표현하면 $f(b) = (2 + \sqrt{2})(b + \sqrt{r^2 - b^2})$이다. 한편 $\overline{CD} = b$일 때, $0 \leq \sqrt{2}b \leq r$이므로, $0 \leq b \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$이다.

$0 < b < \frac{r}{\sqrt{2}}$인 경우 $f'(b) = (2 + \sqrt{2})\left(1 - \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right) > 0$이므로 $f(b)$는 $0 \leq b \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$에서 증가함수이다. 따라서 $f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = (2 + 2\sqrt{2})r$ 이 최대이고, 두 삼각형의 둘레의 길이의 합의 최댓값은 $(2 + 2\sqrt{2})r$이다.

2. 2022학년도 모의논술고사문항 해설(출제범위 포함)

자연계 논제는 고등학교 수학 교육과정에서 학습하는 기본 개념들을 종합적으로 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하기 위하여, 인수분해공식, 이차방정식의 해, 극값과 미분계수, 함수의 최댓값, 최솟값, 도형의 닮음 및 넓이와 삼각함수와의 관계 등의 성질과 응용을 물어보고 있다. 또한, 확률과 통계에서 경우의 수를 통하여 사건이 일어날 가능성을 수치화한 확률의 값을 구하고 이를 통해 문제를 해결하고 미래를 예측하며 합리적인 판단을 하는 능력을 평가하고자 하였다. 단편적인 지식보다는 수학 교육과정에서 학습한 내용에 대한 전반적인 이해를 바탕으로 논제를 해결하고 그 방법을 논술하도록 하였다.

[논제 I](1)에서는 인수분해 공식을 이용하여 절대부등식을 만들고, 4차방정식을 풀어 조건에 맞는 최댓값을 찾는 능력을 평가하고자 하였다.
[논제 I](2)에서는 주어진 성질을 가지는 함수의 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.
[논제 2](1)에서는 다항식의 인수분해를 이용하고, 경우를 적절하게 분류하여 경우의 수를 구하는 논리적인 사고력을 평가하려 하였다.
[논제 2](2)에서는 (1)에서의 문제 해결 방법을 응용하여 수학적 확률을 구하는 합리적인 판단력을 평가하려 하였다.
[논제 3](1)에서는 이등변삼각형의 성질과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하고 수열의 극한을 계산하는 능력을 평가하고자 하였다.
[논제 3](2)에서는 도형의 닮음, 삼각함수를 이용한 삼각형의 넓이와 미적분의 급수를 사용하여 극한을 계산하는 능력을 평가하고자 하였다.
[논제 4](1)에서는 원주각의 성질, 원주각과 중심각, 이등변삼각형의 성질, 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 넓이의 합을 계산하는 능력을 평가하고자 하였다.
[논제 4](2)에서는 미분계수, 함수의 증가와 감소 및 함수의 최댓값, 최솟값을 사용하여 삼각형의 둘레의 합을 계산하는 능력을 평가하고자 하였다.

제시문 출처

[가] 고등학교 수학, ㈜미래엔, p.34 황선욱 외 8인, 2021.
[나] 고등학교 수학II ㈜미래엔, p.82, 83 황선욱 외 8인, 2020.
[다] 고등학교 수학II ㈜좋은책신사고 p.85 고성은 외 6인, 2019.
[라] 고등학교 수학II ㈜미래엔, p.14 황선욱 외 8인, 2020.
[마] 고등학교 확률과 통계 II, ㈜미래엔, p.45 황선욱 외 8인, 2021.
[바] 고등학교 수학I, 좋은책 신사고, p.92 고성은 외 6인, 2018.
[사] 고등학교 미적분 ㈜교학사, p.65, 67 권오남 외 14인, 2020.