2022학년도 모의논술고사[의학계-수학]

1. 2022학년도 모의논술고사 예시답안

[논제 I-1]

함수 $g(x)$를 미분하면 $g'(x)=12e^{3x}+2ae^{2x}+be^{x}$이고, 주어진 조건(가) $g'(x)=e^{4x}g'(-x)$로부터 $12e^{3x}+2ae^{2x}+be^{x}=e^{4x}(12e^{-3x}+2ae^{-2x}+be^{-x})=12e^{x}+2ae^{2x}+be^{3x}$를 얻는다.

변수 x에 1을 대입하면 $12e^{3}+2ae^{2}+be=12e+2ae^{2}+be^{3}$이 되고, $b=12$임을 알 수 있다.

그래서, $g(x)=4e^{3x}+ae^{2x}+12e^{x}+c$이다.

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(4e^{3x}+ae^{2x}+12e^{x}+c)=c$이므로 조건(나) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-9a$로부터

$c=-9a$이다.

조건(다) 함수 $g(x)$가 최소한 하나의 극값을 가져야 하기에 도함수

$g'(x)=12e^{3x}+2ae^{2x}+12e^{x}$가 부호가 바뀌는 근을 가진다.

$A=e^{x}$라 하면 함수 $12A^3+2aA^2+12A=2A(6A^2+aA+6)$가 중근이 아닌 양의 근을 가져야 한다. $A>0$이므로 이차함수 $y=6A^2+aA+6$가 중근이 아닌 양의 근을 가져야 한다.

판별식 $a^2-4\cdot6\cdot6>0$이므로, $|a|>12$이다. 양의 근을 가지기 위하여 꼭짓점의 A좌표가 양수이므로, $a<0$이다. 이로부터 $a<-12$이다.

함수 $h(x)=g(x)-2(a^2+6)e^{x}=4e^{3x}+ae^{2x}-2a^2e^{x}-9a$이고

$h'(x)=12e^{3x}+2ae^{2x}-2a^2e^{x}=2e^{x}(6e^{2x}+ae^{x}-a^2)=2e^{x}(3e^{x}-a)(2e^{x}+a)$이다.

$a<0$이므로 $e^{x}=-\frac{a}{2}$, 즉 $x=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$만 근이 된다.

$h'(x)$가 $x=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$에서 음에서 양으로 부호가 바뀌므로 $h(x)$는 $x=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$에서 최소이고,

$h\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)=4\left(-\frac{a}{2}\right)^3+a\left(-\frac{a}{2}\right)^2-2a^2\left(-\frac{a}{2}\right)-9a=\frac{3}{4}a^3-9a$가 최솟값이다.

함수 $k(a)=\frac{3}{4}a^3-9a$라 하면, $k'(a)=\frac{9}{4}a^2-9=\frac{9}{4}(a^2-4)$이다.

$a<-12$에서 $k'(a)$의 부호가 항상 양이므로 $k(a)$는 증가함수이다. $a<-12$에는 끝점이 포함되지 않으므로 $k(a)$는 최댓값을 가지지 않는다.

그래서 함수 $h(x)$의 최솟값이 최대가 되는 a는 없다.

[논제 I-2]

변 CD의 길이를 x라 하자. 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 E라 하자.

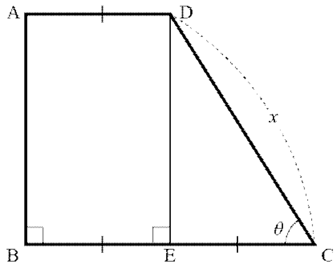
각 DCE를 θ라 하자. $\overline{\mathrm{EC}}=x\cos\theta$, $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AB}}=x\sin\theta$이다.

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{EC}}=x\cos\theta$이다.

사다리꼴 ABCD의 둘레의 길이가 1이므로,

$x(1+3\cos\theta+\sin\theta)=1$이고, $x=\frac{1}{1+3\cos\theta+\sin\theta}$이다.

원 O가 선분 AD에 접하는 경우와 선분 CD에 접하는 경우로 나누어 생각한다.

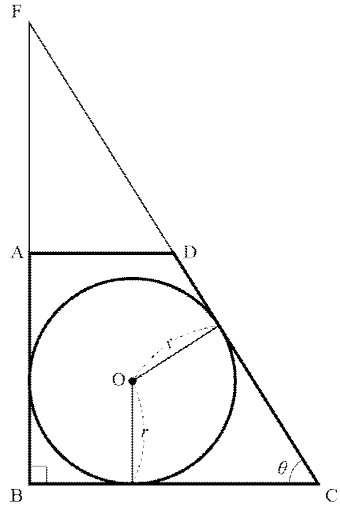


원 O가 선분 AD에 접하는 경우, 반지름은

$$r_1 = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}x\sin\theta = \frac{\sin\theta}{2(3\cos\theta + \sin\theta + 1)}.$$

원 O가 선분 CD에 접하는 경우,

점 F를 직선 AB와 직선 CD의 교점이라 하면 원 O는 직각삼각형 FBC의 내접원이다.



$$r_2 = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{BF}} + \overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{CF}}\right) = \frac{1}{2}\left(2\overline{\mathrm{AB}} + 2\overline{\mathrm{EC}} - 2\overline{\mathrm{CD}}\right)$$

$$= x(\cos\theta + \sin\theta - 1) = \frac{\cos\theta + \sin\theta - 1}{3\cos\theta + \sin\theta + 1}.$$

주어진 θ에 대하여 r_1과 r_2 중 작은 것이 구하고자 하는 r이다.

어떤 θ에 대하여 $r_2 \geq r_1$이 되는지 밝히기 위하여, $r_2 - r_1$를 계산하자.

$r_2 - r_1 = x\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta - 1\right)$이다.

$x > 0$이므로 $f(\theta) = \cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta - 1$의 부호가 $r_2 - r_1$의 부호와 같다.

$f(\theta)$의 근을 찾기 위하여, $f(\theta) = \cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta - 1 = 0$로부터 $\sin\theta = 2 - 2\cos\theta$를 얻는다.

양변을 제곱하면 $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta = 4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta$이다.

이를 정리하면 $5\cos^2\theta - 8\cos\theta + 3 = (5\cos\theta - 3)(\cos\theta - 1) = 0$이다.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이기에 이 방정식은 $\cos\theta = \frac{3}{5}$인 근 하나만을 가진다. 이 근을 $\theta = \alpha$라 하자.

이때, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$이고 $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{4}{5}$이다.

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{3}{5} = \cos\alpha$이므로 $\frac{\pi}{4} < \alpha$이다. $\cos\frac{\pi}{2} = 0 < \frac{3}{5} = \cos\alpha$이므로 $\frac{\pi}{2} > \alpha$이다.

또한, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1 > 0$이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$이다.

이로부터 $0 < \theta \leq \alpha$일 때, $r_2 \geq r_1$이고, $\alpha \leq \theta < \frac{\pi}{2}$일 때, $r_2 \leq r_1$이다.

이를 정리하면, $r = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{2(3\cos\theta + \sin\theta + 1)} & 0 < \theta \leq \alpha \\ \dfrac{\cos\theta + \sin\theta - 1}{3\cos\theta + \sin\theta + 1} & \alpha \leq \theta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 이다.

$0 < \theta \leq \alpha$일 때,

$\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{\cos\theta(3\cos\theta + \sin\theta + 1) - \sin\theta(-3\sin\theta + \cos\theta)}{2(3\cos\theta + \sin\theta + 1)^2} = \dfrac{3 + \cos\theta}{2(3\cos\theta + \sin\theta + 1)^2} > 0$이므로 r은 θ에 대하여 증가함수가 되어 $\theta = \alpha$에서 최댓값을 가진다.

$\alpha \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$일 때,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{(-\sin\theta+\cos\theta)(3\cos\theta+\sin\theta+1)-(\cos\theta+\sin\theta-1)(-3\sin\theta+\cos\theta)}{2(3\cos\theta+\sin\theta+1)^2}$$

$$= \frac{\cos\theta-2\sin\theta+1}{(3\cos\theta+\sin\theta+1)^2}$$ 이다.

$\cos\theta \le \cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\theta \ge \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$이므로 $\cos\theta-2\sin\theta+1 \le \dfrac{3}{5}-2\cdot\dfrac{4}{5}+1=0$이고 $\dfrac{dr}{d\theta} \le 0$이다. 이 경우에도 $\theta=\alpha$에서 최댓값을 가진다.

이 두 경우 모두 $\theta=\alpha$에서 최댓값을 가지므로 r의 최댓값은

$$r = r_1 = \frac{\sin\alpha}{2(3\cos\alpha+\sin\alpha+1)} = \frac{\frac{4}{5}}{2\left(3\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+1\right)} = \frac{1}{9}$$ 이다.

[논제 I-3]

(1) X을 k일 동안 대한이의 재산이 상승한 횟수라고 정의하면 X는 이항분포 $B(k,p)$를 따른다. 따라서 확률 P_k는 다음과 같다.

$$P_k = P(X=m) = {}_kC_m p^m q^{k-m}.$$

구하려는 값은

$$\sum_{k=m}^{2022} P_k \times q^{-k} = \sum_{k=m}^{2022} {}_kC_m\left(\frac{p}{q}\right)^m = \left(\frac{p}{q}\right)^m \sum_{k=m}^{2022} {}_kC_m.$$

여기서, ${}_mC_m$은 $(x+1)^m$에서 x^m의 계수,

${}_{m+1}C_m$은 $(x+1)^{m+1}$에서 x^m의 계수,

$\cdots$

${}_{2022}C_m$은 $(x+1)^{2022}$에서 x^m의 계수이므로

$\displaystyle\sum_{k=m}^{2022} {}_kC_m$은

$$\begin{aligned} &(1+x)^m+(1+x)^{m+1}+\cdots+(1+x)^{2022} \\ &=(1+x)^m \times \frac{(1+x)^{2023-m}-1}{x} \\ &=\frac{(1+x)^{2023}-(1+x)^m}{x} \end{aligned}$$

의 x^m의 계수이다. 즉, $(1+x)^{2023}-(1+x)^m$의 x^{m+1}의 계수와 같고 ${}_{2023}C_{m+1}$ 이다.

즉, $\displaystyle\sum_{k=m}^{2022} P_k \times q^{-k} = p^m q^{-m}\, {}_{2023}C_{m+1}$이다. 따라서 $a_1+a_2+a_3=2023$이다.

(2) X을 64일 동안 대한이의 재산의 상승 횟수라고 하면 $A_{64}=u^X d^{(64-X)}$이고

$B_{64}=r^{64}$이다.

따라서 64일 후의 대한이의 재산이 민국의 재산보다 크거나 같을 확률은

$$P(A_{64} \ge B_{64}) = P(u^X d^{(64-X)} \ge r^{64}) = P(u^X d^{(64-X)} \ge u^{16}d^{48}) = P(X \ge 16).$$

X는 이항분포 $B(64,p)$을 따르고 $64p, 64(1-p) \geq 5$이므로 정규분포 $N(64p, 64pq)$로 근사할 수 있다.

$$P(X \geq 16) = P\left(\frac{X-64p}{\sqrt{64pq}} \geq \frac{16-64p}{\sqrt{64pq}}\right) = P\left(Z \geq \frac{16-64p}{\sqrt{64pq}}\right).$$

여기서, Z는 표준정규분포이다.

즉, $0.1587 = P(A_{64} \geq B_{64}) = P\left(Z \geq \frac{16-64p}{\sqrt{64pq}}\right)$에서 $\frac{16-64p}{\sqrt{64pq}} = 1$이다.

$p+q=1$에서 $p = \frac{1}{5}, q = \frac{4}{5}$이다.

2. 2022학년도 모의논술고사문항 해설(출제범위 포함)

의학계 수학 논제는 고등학교 수학 교육과정에서 학습하는 기본 개념들을 종합적으로 잘 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위하여, 함수의 극한, 도함수, 극대와 극소, 삼각비, 이항분포, 이항정리, 정규분포 등의 성질과 응용을 물어보고 있다. 단편적인 지식보다는 수학 교육과정에서 학습한 내용에 대한 전반적인 이해를 바탕으로 논제를 해결하고 그 방법을 논술하도록 하였다.

[논제 I-1]에서는 주어진 성질을 가지는 함수의 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

[논제 I-2]에서는 삼각비를 이용하여 주어진 도형의 양을 삼각비로 표현하고 미분법을 활용하여 최댓값을 구하는 능력을 평가하고자 하였다.

[논제 I-3]에서는 이항분포와 이항정리의 뜻과 성질을 이해하고 이항분포와 정규분포와의 관계를 추론하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

[가] 고등학교 수학II, ㈜좋은책신사고, p.85 고성은 외 6인, 2019.
[나] 고등학교 수학II, 미래엔, p.14 황선욱 외 8인, 2020.
[다] 고등학교 미적분, 천재교과서, p.81 류희찬 외 9인, 2019.
[라] 고등학교 수학, 미래엔, p.271 황선욱 외 8인, 2020.