그러므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)\,dx$ 는 t 가 증가하면 증가한다.

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)\,dx$ 의 최댓값은 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$이다.

(3-3) $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \le f(x)$를 만족한다.

그러므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos g(x) dx \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{2} dx = \frac{1}{2}$$ 이다.

또한 $h(x)=\frac{\pi}{2}-g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 로 두면 $h(0)=0,\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\ \ h'(x) \le 2$ 를 만족한다.

그러므로 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x에 대하여 $h(x) \le f(x)$를 만족하고,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos g(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin h(x) dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi+2}{4}$$

이다.

문항 ❷ [의예과]

1. 출제 의도

이 문제는 원과 직선의 위치 관계, 직선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 이들의 도형의 방정식을 이해하고 활용하는 능력이 있는지를 평가한다. 또한 주어진 식의 극한값을 구하고, 함수의 최댓값을 제대로 구할 수 있는지도 평가한다.

2. 문항 해설

(2-1) 에서는 주어진 제시문을 이용하여 각 접점에서의 접선의 방정식을 나타낸 뒤, 얻어진 식을 활용하여 접점들을 지나는 직선의 방정식을 계산할 수 있는지를 평가한다.

(2-2) 에서는 대수적 방정식의 기하학적 의미를 제대로 파악하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

(2-3) 에서는 직선의 방정식들을 이용하여 직선들이 이루는 삼각형의 넓이를 식으로 나타내고 이 식의 극한값과 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

3. 채점기준

하위문항 번호		채점 기준	배점
(2-1)		제시문을 이용하여, 접점에서의 접선의 방정식이 $(2,1)$을 지남을 식으로 나타내면	3점
		두 식을 연립하여 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 제대로 구하면	5점
(2-2)		직선 m의 방정식을 t를 이용하여 나타내면	3점
		세 직선 중 두 개가 평행한 경우의 t값을 정확히 구하면	4점
		세 직선이 모두 만나는 경우의 t값을 정확히 구하면	4점
(2-3)	(a)	$S(t)$의 값을 t에 대한 식으로 구하면	5점
		$\lim_{t\to\infty} S(t)$의 값을 옳게 구하면	3점
	(b)	$S(t)$가 감소함수임을 보이면	6점
		최댓값을 제대로 구하면	2점

4. 예시 답안

(2-1) 점 $(2,1)$에서 원에 그은 두 접선의 접점들을 각각 $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$라 하면, 제시문에 의해 두 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1,\ \ x_2x+y_2x=1$이다. 점 $(2,1)$은 두 접선 위에 있으므로 $2x_1+y_1=1,\ \ 2x_2+y_2=1$이다. 따라서 두 접점을 지나는 직선의 방정식은 $2x+y=1$이다.

(2-2) 직선 l의 방정식은 $x+2y=4$로 나타낼 수 있고, 따라서 R의 좌표는 $(4-2t,t)$가 된다. 따라서 위 (1)에서와 마찬가지로 직선 m의 방정식은 $(4-2t)x+ty=1$이 된다. 두 직선 l, m, 그리고 x축이 삼각형을 이루지 않으려면 다음 경우만

가능하다.

1) 세 직선 중 두 개가 평행

l과 m이 평행하거나 x축과 m이 평행해야 한다. x축은 직선의 방정식으로 나타내면 $y=0$이므로, 제시문에 의해 $t=2(4-2t)$이거나 $4-2t=0$이다. 즉, $t=\frac{8}{5}$또는 $t=2$이다.

2) 세 직선이 한 점에서 만남

두 직선 l, m의 교점을 구해보면, 연립방정식 $x+2y=4$, $(4-2t)x+ty=1$을 풀어야 한다. 계산해보면 $y=\frac{-8t+15}{-5t+8}$이므로, 만약 이 값이 0이면 세 직선이 한 점에서 만난다. 따라서 $t=\frac{15}{8}$인 경우가 된다.

따라서, 구하는 답은 $t\neq 2, \frac{8}{5}, \frac{15}{8}$이 된다.

(2-3) (a) 직선 m 이 x 축과 만나는 점은 $(4-2t)x+ty=1$에서 $y=0$인 경우이므로, $x=\frac{1}{4-2t}$가 된다.

l, m 의 교점의 y 좌표는 $y=\frac{-8t+15}{-5t+8}$이므로,

$S(t)=\frac{1}{2}\times\left|4-\frac{1}{4-2t}\right|\times\left|\frac{-8t+15}{-5t+8}\right|$임을 얻는다. 따라서 $\lim_{t\to\infty}S(t)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$ 이다.

(b) $t\le 0$ 이면, $4-\frac{1}{4-2t}>0$, $\frac{-8t+15}{-5t+8}>0$ 이므로,

$S(t)=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4-2t}\right)\left(\frac{-8t+15}{-5t+8}\right)=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4-2t}\right)\left(\frac{8}{5}+\frac{11}{5(-5t+8)}\right)$ 이다.

이 때 $S(t)$ 의 미분을 계산하면

$$S'(t)=\frac{(15-8t)\ (7-3t)}{2(2-t)^2(-5t+8)^2}$$

임을 알 수 있고, 따라서 $t\le 0$ 일 때 분모와 분자가 모두 양의 실수가 되므로, 함수 $S(t)$ 는 $t\le 0$ 에서 항상 증가한다.

따라서 $t=0$일 때 최댓값을 갖는다.

그러므로 $S(t)$의 최댓값은 $S(0)=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{15}{8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{15}{8}=\frac{225}{64}$ 가 된다.

문항 ❸ [의예과]

1. 출제 의도

이 문제는 집합의 정의를 잘 이해하고 수학적 귀납법을 이용하여 논리적으로 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.
특히, 간단한 상황을 분석하여 논리적으로 일반적인 상황으로 유추할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

(3-1), (3-2) 집합 A의 크기가 작은 경우에 대하여 $n(\tilde{A})$의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그 결과를 관찰하여 얻은 결과를 일반적인 경우로 확장시키면 문제를 해결할 수 있다.

(3-3) 소문항 (3-1)과 (3-2)에서 $n(\tilde{A})$의 값이 크기 위한 A의 조건과 $n(\tilde{A})$의 값이 작기 위한 A의 조건을 파악한 후, 두 성질을 조합하여 최댓값과 최솟값 사이의 모든 값이 가능하다는 것을 증명할 수 있다.

3. 채점기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(3-1)	(a) 조건을 만족하는 집합 A를 찾으면	3점
	(b) $n(\tilde{A})$의 최댓값을 찾고 명확하게 증명하면	7점
(3-2)	(a) 조건을 만족하는 집합 A를 찾으면	3점
	(b) $n(\tilde{A})$의 최솟값을 찾고 명확하게 증명하면	7점
(3-3)	$2k-1\le m\le 3k-4$인 모든 m에 대하여 $n(\tilde{A})=m$인 A의 존재성을 증명하면	7점
	$3k-3\le m\le\frac{k^2+k}{2}$인 모든 m에 대하여 $n(\tilde{A})=m$인 A의 존재성을 증명하면	8점

4. 예시 답안

(3-1) (a) $A=\{1,2,4,8\}$이면 $\tilde{A}=\{2,3,4,5,6,8,9,10,12,16\}$으로 $n(\tilde{A})=10$이다.

(b) A의 두 원소의 합이 모두 다를 때 $\tilde{A}$는 가장 많은 원소를 갖는다. 예를 들어, $A=\{1,2,2^2,\cdots,2^{k-1}\}$이면 A의 두 원소의 합은 모두 다르고 이때 $n(\tilde{A})=\frac{k^2+k}{2}$이다.

그러므로 $n(\tilde{A})$가 될 수 있는 값 중 가장 큰 값은 $\frac{k^2+k}{2}$이다.

(3-2) (a) $A=\{1,2,3,4,5\}$이면 $\tilde{A}=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$으로 $n(\tilde{A})=9$이다.

(b) A의 원소를 $a_1<a_2<\cdots<a_k$라 하자..

그러면 $2a_1<a_1+a_2<2a_2<a_2+a_3<\cdots<a_{k-2}+a_{k-1}<2a_{k-1}<a_{k-1}+a_k<2a_k$이므로 $\tilde{A}$는 적어도 $2k-1$개의 원소를 갖는다. 따라서 $n(\tilde{A})\ge 2k-1$이다..

$A=\{1,2,\cdots,k\}$일 때 $\tilde{A}=\{2,3,\cdots,2k\}$로 $n(\tilde{A})=2k-1$이다. 따라서 $n(\tilde{A})$가 될 수 있는 값 중 가장 작은 값은 $2k-1$이다.

(3-3) (3-1)(b)와 (3-2)(b)에서 $n(\widetilde{A})$의 최댓값과 최솟값은 각각 $\frac{k^2+k}{2}$와 $2k-1$임을 증명하였다. 이제 다음 명제를 증명하여 $n(\widetilde{A})$의 값은 $2k-1$이상 $\frac{k^2+k}{2}$이하의 모든 정수가 가능함을 보이자.

명제 : 임의의 자연수 $2k-1 \le m \le \frac{k^2+k}{2}$에 대하여 $n(A)=k$이고 $n(\widetilde{A})=m$인 자연수로 구성된 집합 A가 존재한다.

k에 관한 수학적 귀납법으로 증명하자.

$k=1$일 때, $2k-1=\frac{k^2+k}{2}=1$이고 $A=\{1\}$이 조건을 만족하는 집합이다.

$k=2$일 때, $2k-1=\frac{k^2+k}{2}=3$이고 $A=\{1,2\}$가 조건을 만족하는 집합이다.

$k>2$라 하고, 위의 명제가 $k-1$일 때 성립한다고 가정하자. $2k-1 \le m \le 3k-4$인 경우와 $3k-3 \le m \le \frac{k^2+k}{2}$인 경우로 나눠서 A의 존재성을 증명하자.

a) $2k-1 \le m \le 3k-4$인 경우.

$A=\{1,2,\cdots,k-1,m-k+1\}$라 하자.

이때, $\widetilde{A}=\{2,3,\cdots,2k-2\} \cup \{m-k+2,m-k+3,\cdots,m\} \cup \{2m-2k+2\}$인데

$m-k+2 \le 2k-2$이고 $m<2m-2k+2$이므로

$\widetilde{A}=\{2,3,\cdots,m-1,m,2m-2k+2\}$로 $n(\widetilde{A})=(m-1)+1=m$이다.

b) $3k-3 \le m \le \frac{k^2+k}{2}$인 경우.

$2(k-1)-1=2k-3 \le m-k \le \frac{k^2-k}{2}=\frac{(k-1)^2+(k-1)}{2}$이므로 수학적 귀납법에 의하여 $n(B)=k-1$이고 $n(\widetilde{B})=m-k$인 집합 B가 존재한다. B에서 가장 큰 원소를 x라 할 때 집합 $A=B \cup \{2x+1\}$로 정의하자.

그러면 $\widetilde{A}=\widetilde{B} \cup \{2x+1+b \mid b \in B\} \cup \{4x+2\}$인데 $\widetilde{B}$의 가장 큰 원소는 $2x$이고 $\{2x+1+b \mid b \in B\}$의 각 원소는 $2x+1$ 이상 $3x+1$이하이므로 세 개의 집합 $\widetilde{B}$, $\{2x+1+b \mid b \in B\}$, $\{2x+2y+2\}$는 서로소이다.

따라서 $n(\widetilde{A})=(m-k)+(k-1)+1=m$이다.

수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 k에 대하여 위의 명제가 성립한다.

2023학년도 논술(논술우수자) 전형 입시결과

- 본 입시 결과는 2024학년도 수시모집 지원을 위한 참고자료일 뿐이며, 절대적 수치는 아닙니다.
- 논술 성적과 학생부교과 등급 간에는 뚜렷한 상관관계가 없으며, 논술 평가 시 교과등급은 영향을 주지 않습니다.
- 학생부교과 반영방법: 학년별, 과목별 가중치 미반영(전 학년 100%) / 이수단위 반영

① 인문

문제 유형	모집인원	지원인원	경쟁률	실질 경쟁률	내신등급 평균	논술점수 평균
인문	163명	4,544명	27.9	20.8	4.71	80.92

모집단위	모집인원(명)	경쟁률	실질 경쟁률	최초합격자 등록률	추가합격자 예비번호	내신등급		논술점수
						평균	최저	평균
경영학과	25	34.6	24.2	96.0%	0	4.85	8.07	78.50
글로벌금융학과(인문)	7	25.9	18.9	71.4%	2	3.99	4.60	85.07
아태물류학부(인문)	15	27.8	21.7	100.0%	0	4.62	5.61	85.80
국제통상학과	13	25.9	20.9	92.3%	1	4.72	5.94	86.62
국어교육과	4	26.0	19.8	100.0%	0	4.14	5.21	77.00
사회교육과	4	29.3	20.3	75.0%	1	4.41	5.48	84.88
행정학과	12	25.8	20.1	91.7%	1	4.69	5.59	80.75
정치외교학과	9	25.0	18.9	77.8%	2	4.51	5.57	85.44
미디어커뮤니케이션학과	8	34.8	25.1	100.0%	0	4.07	4.67	69.81
경제학과	11	25.3	16.9	100.0%	0	4.69	6.71	80.32
사회복지학과	3	25.0	18.3	100.0%	0	5.51	6.49	85.00
한국어문학과	6	25.2	18.0	100.0%	0	4.57	5.07	66.75
사학과	5	22.4	16.6	100.0%	0	4.64	5.58	79.70
철학과	5	21.2	15.8	60.0%	2	5.71	7.54	85.00
중국학과	7	23.0	19.1	100.0%	0	5.29	6.16	80.86
일본언어문화학과	8	25.5	21.0	75.0%	2	5.23	6.62	77.81
영어영문학과	10	27.7	21.4	100.0%	0	4.71	6.33	82.25
문화콘텐츠문화경영학과	11	31.5	23.6	100.0%	0	4.68	5.84	81.77