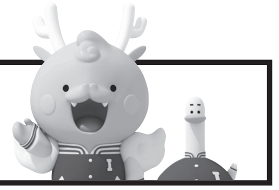


2024학년도 논술 모의고사 문제(자연 : 의예과)

문제 1 2024학년도 논술 모의고사 문제(자연: 의예과 외)의 문항 3과 동일

문제 2 **(35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) 좌표평면 위에 $x^2+y^2=r^2$으로 정의된 원 위의 한 점 (x_1,y_1)에서 이 원에 대한 접선의 방정식은

$xx_1+yy_1=r^2$이다.

(나) 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행할 필요충분조건은 $m=m'$이고 $n\neq n'$이 성립하는 것이다.

(※) 좌표평면 위에 중심이 $(0,0)$이고 반지름이 1인 원 O와 두 점 $(0,2)$, $(4,0)$을 지나는 직선 l이 주어져 있다.

(2-1) 점 $(2,1)$에서 원 O에 그은 두 접선이 원과 만나는 접점을 각각 P, Q라 하자. 직선 $\overline{PQ}$의 방정식을 구하시오. [8점]

(2-2) l위의 한 점 R의 y좌표를 t라 하자. R에서 원 O에 그은 두 접선이 원과 만나는 두 접점을 지나는 직선을 m이라 하자. 두 직선 l, m그리고 x축이 삼각형이 되는 t의 조건을 구하시오. [11점]

(2-3) (2-2)의 조건을 만족하는 t에 대해, 두 직선 l, m 그리고 x축이 이루는 삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하자.

(a) $\lim_{t\to\infty}S(t)$의 값을 구하시오. [8점]

(b) 구간 $t\leq 0$ 에서 $S(t)$의 최댓값을 구하시오. [8점]

문제 3 **(35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(수학적 귀납법) 자연수 $n(\geq 1)$에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n(\geq 1)$에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$ $(k\geq 1)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 자연수로 구성된 집합 A에 대하여 집합 $\widetilde{A}$를 A의 두 원소의 합으로 표현할 수 있는 모든 자연수의 집합으로 정의하자.

이때, 같은 원소를 합하여도 된다. 즉, $\widetilde{A}$는 집합 $\{x+y\mid x,y\in A\}$와 같다. 예를 들어, $A=\{1\}$이면 $\widetilde{A}=\{2\}$이고

$A=\{1,3,4\}$이면 $\widetilde{A}=\{2,4,5,6,7,8\}$이다.

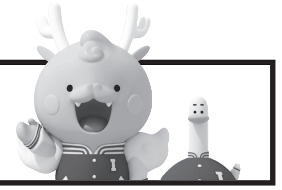
(3-1) (a) 4개의 자연수로 구성되어 있고 $n(\widetilde{A})=10$인 집합 A를 하나 찾으시오. [3점]

(b) 집합 A는 k개의 자연수로 구성된 집합이다. $n(\widetilde{A})$가 될 수 있는 값 중 가장 큰 값을 구하시오. [7점]

(3-2) (a) 5개의 자연수로 구성되어 있고 $n(\widetilde{A})=9$인 집합 A를 하나 찾으시오. [3점]

(b) $n(A)=k$일 때 $n(\widetilde{A})$가 될 수 있는 값 중 가장 작은 값을 구하시오. [7점]

(3-3) 자연수로 구성된 집합 A에 대하여 $n(A)=k$일 때 $n(\widetilde{A})$가 될 수 있는 값들을 모두 구하시오. [15점]



2024학년도 논술 모의고사 문제(자연) 해설

문항 ❶

1. 출제 의도

주어진 점에서 미분 가능한 함수의 접선을 구하는 능력과 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있는 능력을 평가한다.

2. 문항 해설

주어진 함수의 미분을 이용하여 접선을 구하고, 매개변수로 주어진 함수의 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구하는 문제이다.

3. 채점기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(1-1)	접선의 방정식을 구하면	4점
	P의 좌표를 구하면	4점
(1-2)	접점이 일치할 조건을 구하면	4점
	기울기 조건을 구하면	4점
	u, v를 t에 대해서 나타내면	4점
(1-3)	$\frac{du}{dt}$를 구하면	3점
	$\frac{dv}{dt}$를 구하면	3점
	매개변수로 주어진 함수의 미분을 이용하여	5점
	접선의 방정식을 구하면	4점

4. 예시 답안

(1-1) 제시문 (가)를 이용하면 직선 l의 방정식은 $y=x+1$이 되므로 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각은 $\frac{\pi}{4}$가 된다. 점 Q 를 지나고 주어진 조건을 만족하는 점 P를 삼각함수를 이용하여 구하면

$\left(0+\cos\frac{\pi}{4,}1-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이다.

(1-2) 제시문 (가)를 이용하면 점 (t,e^t)에서의 법선의 기울기는 $-e^{-t}$이므로 방정식은 $y=-e^{-t}(x-t)+e^t$이 된다. 교점에서 접선이 일치하기 위해서는 원의 중심 (u,v)는 법선 위에 위치해야 하므로

$v-e^t=-e^t(u-t)$

를 만족한다. 또한 (t,e^t)과 (u,v)사이의 거리가 1이므로

$(u-t)^2+\ (v-e^t)^2=1$
이 성립한다. 이 두 식을 연립하면

$u-t=\pm\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2t}}}$, $v-e^t=\mp\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$(복호동순)

이 성립한다. 그런데 $v<e^u$이므로,

$u=t+\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2t}}}$, $v=e^t-\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$.

(1-3) (1-1)로부터 $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, $t=0$임을 알 수 있다.

$\frac{du}{dt}=1+\frac{e^{-2t}}{(\sqrt{1+e^{-2t}})^3}$, $\frac{dv}{dt}=e^t+\frac{e^{2t}}{(\sqrt{1+e^{2t}})^3}$

이므로, $t=0$일 때, $\frac{du}{dt}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{dv}{dt}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}$이다. 제시문 (나)를 이용하면 $\frac{dv}{du}=1$이고 제시문 (가)를 이용하여 직선의 방정식을 구하면 직선의 방정식은 $v=u-\sqrt{2}+1$이다.

문항 ❷

1. 출제 의도

함수의 그래프로 주어지는 부분의 넓이가 최소가 되는 경우를 부분적분법에 의해 계산할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

함수의 미분을 통하여 그래프의 개형을 이해하고 그것을 통하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다.

3. 채점기준

하위문항 번호		채점 기준	배점
(2-1)	(a)	도함수 $f'(x)=a-\frac{1}{(x-3)^2}$을 구하면	2점
		a의 범위를 구하면	3점
	(b)	a의 값을 구하면	5점
	(c)	$f(x)$가 $c=3-2\sqrt{2}$의 좌우에서 증가, 감소함을 보이면	3점
		최댓값을 구하면	2점
	(d)	최댓값과 최솟값을 올바르게 서술하면	4점
		b 의 범위를 구하면	6점
(2-2)		절댓값 부호 안의 식을 $\frac{x^3}{27(x-3)}$로 나타내면	4점
		범위를 정확히 구하면	6점

4. 예시 답안

(2-1) (a) $f'(x)=a-\frac{1}{(x-3)^2}=0$으로부터 이것이 근을 가지려면 $a>0$이어야 하고 근을 구하면 $c=3-\frac{1}{\sqrt{a}}$이 된다. 이 값이 구간 $(-1,1)$에 있기 위한 a의 범위는 $\frac{1}{16}<a<\frac{1}{4}$이다.

(b) $f(-1)=f(1)$은 $-a+b-\frac{1}{4}=a+b-\frac{1}{2}$란 뜻이고, 이것을 풀면

$$a=\frac{1}{8}$$

을 얻는다.

(c) $a=\frac{1}{8}$일 때, $c=3-2\sqrt{2}$에서 도함수 $f'(x)$의 값은 0이다. $f(x)$는 구간 $[-1,3-2\sqrt{2}\,]$에서 증가하고 구간 $[3-2\sqrt{2}\,,1]$ 에서 감소한다. (또는 $f''(x)=\frac{2}{(x-3)^3}<0$이다.) 따라서 $f(x)$는 $c=3-2\sqrt{2}$에서 극댓값이자

최댓값을 갖는다. 그러므로 최댓값은 $f(3-2\sqrt{2})=b+\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(d) 최솟값은 $f(-1)=f(1)=b-\frac{3}{8}$이므로, 부등식

$$-\frac{1}{40}<b-\frac{3}{8}<b+\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{40}$$

로부터 다음과 같은 b의 범위를 얻는다.

$$\frac{7}{20}<b<\frac{10\sqrt{2}-7}{20}$$

(2-2) $\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x+1\right)+\frac{1}{x-3}\right|=\left|\frac{x^3}{27(x-3)}\right|\leq\frac{|x|}{27|x-3|}$ 이다.

이때, 구간 $[-1,1]$에서 $|x|\leq 1$이고, $|x-3|\geq 2$이므로 $\frac{|x|}{27|x-3|}\leq\frac{1}{27\cdot 2}<\frac{1}{50}$이다.

문항 ❸

[의예과 문항 1과 동일]

1. 출제 의도

적분의 개념을 잘 이해하고, 치환적분법을 활용할 수 있는지와 적분의 크기를 비교할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

(3-1)에서는 치환적분법을 활용하여 주어진 함수의 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.
(3-2), (3-3)에서는 적분의 기본 개념을 이해하고 주어진 함수가 가질 수 있는 적분값의 범위를 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(3-1)	치환적분법을 활용하여 적분값을 구하면	5점
(3-2)	t 가 커질 때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin f(x)dx$ 도 증가하는 것을 보이면	5점
	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin f(x)dx$의 최댓값을 보이면	5점
(3-3)	$t=\frac{\pi}{4}$일 때 $f(x)$와 $g(x)$의 관계를 얻어내면	5점
	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos g(x)dx\geq\frac{1}{2}$임을 보이면	5점
	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos g(x)dx\leq\frac{\pi+2}{4}$임을 보이면	5점

4. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)의 치환적분법에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x dx+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

이다.

(3-2) $t_1<t_2$인 두 상수 t_1, t_2에 대하여 $t=t_1$일 때 $f(x)$를 $f_1(x)$라 하고 $t=t_2$일 때 $f(x)$를 $f_2(x)$라 하면, 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 $f_1(x)\leq f_2(x)$이다. 또한 $0\leq f_1(x), f_2(x)\leq\frac{\pi}{2}$이고 sin은 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 증가함수이므로 $\sin f_1(x)\leq\sin f_2(x)$이다.

그러므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)\,dx$ 는 t 가 증가하면 증가한다.

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)\,dx$ 의 최댓값은 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$이다.

(3-3) $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \le f(x)$를 만족한다.

그러므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos g(x)dx \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{2} dx = \frac{1}{2}$$이다.

또한 $h(x)=\frac{\pi}{2}-g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 로 두면 $h(0)=0,\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\ \ h'(x) \le 2$ 를 만족한다.

그러므로 $t=\frac{\pi}{4}$일 때, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x에 대하여 $h(x) \le f(x)$를 만족하고,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin h(x)dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi+2}{4}$$

이다.

문항 ❷ [의예과]

1. 출제 의도

이 문제는 원과 직선의 위치 관계, 직선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 이들의 도형의 방정식을 이해하고 활용하는 능력이 있는지를 평가한다. 또한 주어진 식의 극한값을 구하고, 함수의 최댓값을 제대로 구할 수 있는지도 평가한다.

2. 문항 해설

(2-1) 에서는 주어진 제시문을 이용하여 각 접점에서의 접선의 방정식을 나타낸 뒤, 얻어진 식을 활용하여 접점들을 지나는 직선의 방정식을 계산할 수 있는지를 평가한다.

(2-2) 에서는 대수적 방정식의 기하학적 의미를 제대로 파악하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

(2-3) 에서는 직선의 방정식들을 이용하여 직선들이 이루는 삼각형의 넓이를 식으로 나타내고 이 식의 극한값과 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

3. 채점기준

하위문항 번호		채점 기준	배점
(2-1)		제시문을 이용하여, 접점에서의 접선의 방정식이 $(2, 1)$을 지남을 식으로 나타내면	3점
		두 식을 연립하여 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 제대로 구하면	5점
(2-2)		직선 m의 방정식을 t를 이용하여 나타내면	3점
		세 직선 중 두 개가 평행한 경우의 t값을 정확히 구하면	4점
		세 직선이 모두 만나는 경우의 t값을 정확히 구하면	4점
(2-3)	(a)	$S(t)$의 값을 t에 대한 식으로 구하면	5점
		$\lim_{t\to\infty} S(t)$의 값을 옳게 구하면	3점
	(b)	$S(t)$가 감소함수임을 보이면	6점
		최댓값을 제대로 구하면	2점

4. 예시 답안

(2-1) 점 $(2, 1)$에서 원에 그은 두 접선의 접점들을 각각 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$라 하면, 제시문에 의해 두 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1,\ \ x_2x+y_2x=1$이다. 점 $(2, 1)$은 두 접선 위에 있으므로 $2x_1+y_1=1,\ \ 2x_2+y_2=1$이다. 따라서 두

접점을 지나는 직선의 방정식은 $2x+y=1$이다.

(2-2) 직선 l의 방정식은 $x+2y=4$로 나타낼 수 있고, 따라서 R의 좌표는 $(4-2t, t)$가 된다. 따라서 위 (1)에서와 마찬가지로

직선 m의 방정식은 $(4-2t)x+ty=1$이 된다. 두 직선 l, m, 그리고 x축이 삼각형을 이루지 않으려면 다음 경우만