2023학년도 논술 모의고사 문제(자연 : 의예과)

문제 1 **2023학년도 논술 모의고사 문제(자연: 의예과 외)의 문항 3과 동일**

문제 2 **(35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 열린구간에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 열린구간에서 감소한다.

(나) 닫힌구간 $[a,b]$를 포함하는 열린구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 연속인 도함수를 가질 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(다) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 두 함수가 $f(x)\le g(x)$를 만족하면

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$$

(2-1) 두 양수 a, b에 대하여 $a\ln\frac{b}{a}\le b-a$임을 보이시오. [8점]

(2-2) 모든 자연수 n에 대하여 $\int_0^1\sin(2n\pi x)\ln(1+x)dx\le 0$임을 보이시오. [12점]

(2-3) 자연수 n에 대하여 $f(x)=x-\sin(2n\pi x)+1$일 때, $\int_0^1 f(x)\ln f(x)dx\ge\ln 4-\frac{3}{4}$임을 보이시오. [15점]

문제 3 **(35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(수학적 귀납법) 자연수 $n(\ge 9)$에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 $n(\ge 9)$에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=9$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k\ (k\ge 9)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 2 이상인 서로 다른 자연수 $n(\ge 1)$개로 이루어진 집합 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$에 대하여 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1$이면 A를 "조화로운 집합"이라 부르자. 예를 들어, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$이므로 $\{2,3,6\}$은 조화로운 집합이다.

(3-1) 조화로운 집합 A에 대하여 $n(A)\ge 3$임을 증명하시오. [5점]

(3-2) (a) 집합 A가 조화로운 집합이면, $x\in A$인 모든 x에 대하여 $2x\in B$인 조화로운 집합 B가 존재함을 증명하시오. [7점]

(b) $\{3,4,5,6,20\}$이 2를 포함하지 않는 조화로운 집합임을 이용하여, $n(A)=9$이고 $2,3\notin A$인 조화로운 집합을 하나 구하시오. [8점]

(3-3) (a) 2 이상인 자연수 m에 대하여 $\frac{1}{m}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$이 되는 서로 다른 자연수 p,q의 순서쌍 (p,q)를 하나 구하시오. [5점]

(b) 9 이상인 임의의 자연수 n에 대하여 원소의 개수가 n이고 $2,3$을 포함하지 않는 조화로운 집합이 존재함을 증명하시오. [10점]

2023학년도 논술 모의고사 문제(자연) 해설

문항 ❶

1. 출제 의도

이 문제는 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 이것을 기하적 문제에 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 주어진 함수를 미분하여 최솟값을 구할 수 있는지도 아울러 평가한다.

2. 문항 해설

- **(1-1)** 삼각함수의 덧셈정리를 잘 활용하여 기하적 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.
- **(1-2)** 기하적 취향의 문제로서 다양한 풀이가 가능하다.
- **(1-3)** 주어진 조건에 맞는 함수를 구하고 이를 통하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

3. 채점기준

(1-1) • $\overline{PQ}=10\tan\frac{\pi}{8}$로 나타내면 4점

• $\overline{PQ}$의 값을 구하면 6점

(1-2) • $k=\overline{PM}+\overline{QM}=5\tan\theta+5\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$로 나타내면 5점

• $\overline{MN}$의 값을 올바르게 구하면 5점

(1-3) • k를 x의 식으로 올바르게 나타내면 10점

• 미분하여 최솟값을 구하면 5점

4. 예시 답안

(1-1) $\overline{PQ}=10\tan\frac{\pi}{8}$이다. 한편 제시문에 의해

$$\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}=(\sqrt{2}-1)^2$$이므로 $\overline{PQ}=10(\sqrt{2}-1)$이다.

(1-2) $\theta = \angle PAM$이라고 하면

$k = \overline{PM} + \overline{MQ} = 5\tan\theta + 5\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 5\left(\tan\theta + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) = 5\,\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan\theta}$이므로,

$5\tan^2\theta - k\tan\theta + (5-k) = 0$이고, $\tan\theta = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 20(5-k)}}{10}$이다.

$\tan\theta = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} > \frac{k}{10}$이므로 $\tan\theta = \frac{k + \sqrt{k^2 + 20k - 100}}{10}$이다.

따라서 $\overline{MN} = \overline{PM} - \overline{PN} = 5\tan\theta - \frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + 20k - 100}$이다.

(별해1) 삼각형 APQ의 외심을 O라 하면 삼각형 OPQ도 직각이등변삼각형이 된다.

그리고 $\overline{OA} = \overline{OP} = \frac{k}{\sqrt{2}}$이다.

O에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 R이라 하면 $\overline{MR} = \overline{NO} = \frac{k}{2}$이므로 $\overline{AR} = 5 - \frac{k}{2}$이다.

$\overline{OR} = \overline{NM}$이므로, 삼각형 AOR에 대해 피타고라스 정리를 쓰면

$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(5 - \frac{k}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + 20k - 100}$이다.

(별해2) 삼각형 APQ의 넓이는 밑변과 높이에 의해서 $\frac{5k}{2}$이다. 또한 MN의 길이를 t라 할 때,

AP, AQ의 길이는 각각 $\sqrt{25 + (k/2+t)^2}$, $\sqrt{25 + (k/2-t)^2}$이다.

사인함수를 이용하면 삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(25 + t^2 + k^2/4)^2 - k^2t^2} = \frac{5k}{2}$가 된다. 양변을 제곱하여 정리하면

$t^4 + 2(25 - k^2/4)t^2 + (k^2/4 - 25)^2 - 25k^2 = 0$이 되고 이로부터 $t^2 = k^2/4 + 5k - 25$를 얻을 수 있다.

(1-3) $\angle PAM = \theta$라 두면, $\overline{PM} = 5\tan\theta$이다. $\angle BAM = \frac{\pi}{4}$이므로

$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{BP} + \overline{PM}}{5} = \frac{x + 5\tan\theta}{5}$로부터 $5\tan\theta = 5 - x$이다.

$k = \overline{PQ} = \overline{PM} + \overline{MQ} = 5\tan\theta + 5\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 5\tan\theta + \frac{5 - 5\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$= 5 - x + \frac{5 - 5 + x}{1 + 1 - \frac{x}{5}} = 5 - x + \frac{5x}{10-x} = \frac{x^2 - 10x + 50}{10 - x}$

이므로 k를 x에 대해 미분하여 미분값이 0일 때의 x를 구하면 $x = 10 - 5\sqrt{2}$가 된다.

이때의 k의 값은 $10(\sqrt{2} - 1)$이고 이 값은 (1-1)에서 얻은 값과 같다.

(별해) $10 = \overline{BC} = \overline{BP} + \overline{PN} + \overline{NM} + \overline{MC} = x + \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + 5k - 25} + 5$이므로

$5 - x - \frac{k}{2} = \sqrt{\frac{k^2}{4} + 5k - 25}$을 얻는다.

양변을 제곱하여 정리하면 $50 + x^2 - 10x = k(10 - x)$를 얻게 된다. 따라서 $k = \frac{x^2 - 10x + 50}{10 - x}$이다.

k를 x에 대해 미분하여 미분값이 0일 때의 x를 구하면 $x = 10 - 5\sqrt{2}$가 된다.

이때의 k의 값은 $10(\sqrt{2} - 1)$이고 이 값은 (1-1)에서 얻은 값과 같다.

문항 ❷

1. 출제 의도

(2-1) 직선의 방정식을 결정하는 요소들(기울기, 한 점)을 인식하여 직선의 방정식을 구하고, 교점을 찾기 위해 포물선의 방정식과 연립하여 두 교점을 정확히 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다. 또한 도형의 면적을 적분을 이용하여 올바로 계산할 수 있음을 확인하고자 하였다.

(2-2) (2-1)과 유사한 출제 의도이나, (2-1)보다 조금 더 복잡한 계산을 다루고, 근과 계수의 관계를 활용할 수 있는지를 확인하고자 하였다. 근과 계수의 관계를 활용하지 않고 인수분해 또는 근의 공식을 사용하는 경우, 계산 능력을 확인하는 문제이다.

(2-3) 주어진 기울기를 갖는 접선의 방정식, 평행한 두 직선 사이의 거리, 합성함수의 미분 및 삼각함수에 관련된 내용을 이해하고 있는지를 종합적으로 묻는 문제이다. 이 문제를 잘 해결하기 위해서는 주어진 식을 잘 정리할 수 있는 계산 능력 역시 중요하다.

2. 문항 해설

- (2-1) 제시문 (가)를 이용하여 직선의 방정식을 구하고 포물선과 연립하면 이차방정식을 얻게 된다. 이 때, 근과 계수의 관계를 이용하면 나머지 한 근을 쉽게 찾을 수 있다. 그 후 제시문 (나)를 이용하여 직접 계산하면 답을 얻을 수 있다. 이 때, 근과 계수의 관계 대신, 인수분해 또는 근의 공식을 사용할 수도 있다.
- (2-2) (2-1)에서와 같이 제시문 (가)를 이용하여 직선의 방정식을 구하고 포물선과 연립 후, 근과 계수의 관계를 이용하여 나머지 한 근을 구하게 된다. 마찬가지로 제시문 (나)를 이용하여 도형의 면적을 계산하면 된다. (2-1)에서와 마찬가지로 근과 계수의 관계 대신, 인수분해 또는 근의 공식을 사용할 수도 있다.
- (2-3) 도함수를 이용하여 주어진 기울기를 갖는 접점의 x좌표를 구하면 접선의 방정식을 얻을 수 있게 된다. 한 점으로부터 직선까지의 거리를 이용하여 평행한 직선의 거리를 구하게 되면 첫 번째 답을 얻을 수 있다. 합성함수의 미분을 통해 도함수를 구하고, 직각삼각형에서의 $\sin, \cos, \tan$의 관계를 통해 구체적인 값들을 구한 후 대입하면 구하고자 하는 답을 얻을 수 있다.

3. 채점기준

(2-1)
- 직선의 방정식을 구하면 3점
- 교점을 구하면 4점
- 정적분을 정확히 계산하면 3점

(2-2)
- 직선의 방정식을 구하면 3점
- 교점을 구하면 4점
- 정적분을 정확히 계산하면 3점

(2-3) • 접점을 구하면 3점

• 접선의 방정식을 구하면 3점

• h를 θ에 관한 식으로 나타내면 3점

• $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 정확히 구하면 3점

• $\dfrac{dh}{d\theta}$를 정확히 구하면 3점

4. 예시 답안

(2-1) $\theta = \pi/6$일 때 직선 l의 방정식은 제시문 (가)를 이용하면 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+1$이 된다. 문제의 조건에서 $x=1$이 직선 l과 곡선 $y=x^2$의 교점이 됨을 알 수 있다. 제시문 (다)를 이용하여 직선 l과 곡선 $y=x^2$의 두 교점을 모두 구하면 $x=1, \dfrac{1}{\sqrt{3}}-1$이 된다. 제시문 (나)를 이용하면

$$S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+1-x^2\right)dx = \frac{1}{6}\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{54}\left(90-37\sqrt{3}\right) = \frac{5}{3}-\frac{37\sqrt{3}}{54}$$

이 된다.

(2-2) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$일 때, $S(\theta)$는 (2-1)의 과정을 일반화하여 구할 수 있다. 즉, 제시문 (가)를 이용하면 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y=\tan\theta(x-1)+1$이고, 제시문 (다)의 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 $x=1,\ \tan\theta-1$에서 교점이 생긴다는 것을 알 수 있다. (2-1)에서와 같이 제시문 (나)를 이용하면

$$S(\theta) = \int_{\tan\theta-1}^{1}\left(\tan\theta(x-1)+1-x^2\right)dx = \frac{1}{6}(2-\tan\theta)^3$$

이 된다. 따라서 구하고자 하는 답은 $S(\theta) = \dfrac{1}{6}(2-\tan\theta)^3$이 된다.

(2-3) 접선의 기울기가 $\tan\theta$가 되는 접점의 x좌표는 $\dfrac{\tan\theta}{2}$가 된다. 따라서, 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{\tan\theta}{2}, \left(\dfrac{\tan\theta}{2}\right)^2\right)$이고 직선 l'의 방정식은 $y=\tan\theta x-\left(\dfrac{\tan\theta}{2}\right)^2$이 된다. h의 값은

$$h = \frac{\left|\left(\frac{\tan\theta}{2}\right)^2-\tan\theta+1\right|}{\sqrt{(\tan\theta)^2+1}} = \frac{1}{4}\cos\theta(\tan\theta-2)^2$$

이 된다.

$\dfrac{dh}{d\theta} = -\dfrac{1}{4}\sin\theta(\tan\theta-2)^2+\dfrac{1}{2}\sec\theta(\tan\theta-2)$이고, 기울기가 $\dfrac{1}{2}$일 때, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{dh}{d\theta} = -\dfrac{39\sqrt{5}}{80}$가 된다.

문항 ❶ (의예과)

1. 출제 의도

이 문제는 함수의 증가와 감소, 좌극한/우극한, 평균값 정리 등을 잘 이해하고 있는지 이러한 개념과 관련되거나 유사한 상황에 관한 명제들을 이용해서 평가하는 문제이다. 주어진 조건을 정리 또는 공식을 이용해서 풀이하는 표준적인 문제와는 다르게, 알고 있는 정리가 성립하지 않는 반례에 해당하는 상황이나 또는 다른 성격의 명제가 성립하는 상황에 대한 소문항들로 구성되어 있기 때문에 표준적인 문제의 반복학습보다는 교과내용을 깊이 있게 이해하고 사고하는 것을 더 강조하는 문제이다.

2. 문항 해설

• **(3-1)** 함수의 증가/감소라는 개념을 잘 이해하고 있는지 평가하는 문제이다.

• **(3-2)** 평균값의 정리가 성립하지 않는 상황을 파악할 수 있는지 평가하는 문제이다.

• **(3-3)** 평균값의 정리와 유사한 명제가 성립하는 특정한 조건을 찾을 수 있는지 평가하는 문제이다.

3. 채점 기준

(3-1) • $f(x)$가 증가/감소인 구간을 찾아내면 3점

• 앞에서 구한 구간과 문제의 상황을 연결시켜서 문제의 조건을 만족하는 a의 값을 구하면 4점

(3-2) • (a) $g(0)$의 값을 좌극한의 정의를 이용하여 구하면 2점

• (a) 주어진 함수의 그래프를 정확히 그리면 4점

• (b) 반례가 되는 a, b의 값을 찾으면 3점

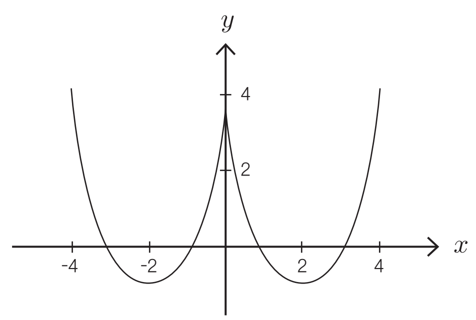
• (b) 구한 a, b의 값이 문제의 명제의 반례가 된다는 것을 논리적으로 설명하면 4점

(3-3) • k의 최솟값을 정확히 구하면 3점

• 구한 k의 값에 대하여 명제가 성립한다는 사실을 정확히 증명하면 7점

4. 예시 답안

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



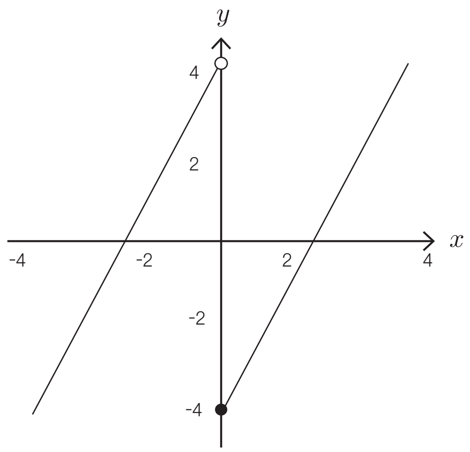
(3-1) 제시문 (나)에 의하여 $f(x)$는 $[2, \infty)$에서 증가함수이므로 $a \geq 2$ 이면 명제는 성립하지 않는다.

$a < 2$ 이고 $a \neq -2$ 이면 $x = 2$ 일 때 두 부등식 $x > a$, $f(x) < f(a)$가 성립하므로 명제는 참이다.

$a = -2$ 이면 명제는 성립하지 않으므로 구하려는 집합은 $(-\infty, -2) \cup (-2, 2)$ 이다.

(3-2) (a) $x > 0$이면 $g(x) = f'(x) = 2x - 4$, $x < 0$이면 $g(x) = f'(x) = 2x + 4$이다.

$g(0) = \lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (2x - 4) = -4$이므로, 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(b) 평균값의 정리에 의하여 명제

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{x \to c+} f'(x)\text{이고 } a < c < b\text{인 실수 } c\text{가 존재한다.}$$

는 $b > a \geq 0$ 또는 $0 \geq b > a$일 때 참이므로 반례는 $a < 0, b > 0$인 범위에서 찾아야 한다. 예를 들어 $a = -2, b = 2$

라고 하면 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$이고 $-2 < c < 2$일 때 (a)의 그래프의 개형으로부터 $f'(c) \neq 0$이므로 명제는 거짓이다.

(3-3) 명제가 성립하는 k의 최솟값은 4이다. (3-2)(b)에서 $b - a = 4$이고 명제

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{x \to c+} f'(x)\text{이고 } a < c < b\text{인 실수 } c\text{가 존재한다.}$$

가 성립하지 않는 a, b의 예를 구하였으므로 명제가 참이려면 $k \geq 4$이어야 한다. 역으로 $b - a > 4$이라고 가정하자.

$b > a \geq 0$ 또는 $0 \geq b > a$이면 평균값의 정리에 의해 명제가 성립한다. $a < 0, b > 0$이라면, 기울기 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$는 두 점 $(0, f(0))$과 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기 $\frac{f(b) - f(0)}{b - 0}$과 두 점 $(a, f(a))$와 $(0, f(0))$을 지나는 직선의 기울기 $\frac{f(0) - f(a)}{0 - a}$의 사이에 있는 값 (또는 두 기울기가 같은 경우 두 기울기와 같은 값)이어야 한다. 이 각각의 기울기는 평균값의 정리에 의하여 어떤 α, β에 대하여 $g(\alpha), g(\beta)$ $(a < \alpha < 0, 0 < \beta < b)$와 같다. 그런데, (3-2)(a)에서 구한 함수 $g(x)$의 그래프의 개형으로부터 $b - a > 4$이고 $a < 0, b > 0$이면 $g(b) > g(a)$이므로 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g(\gamma)$인 실수 γ $(a < \gamma < b)$가 반드시 존재한다.

(실제로 $b - a > 4$일 때, $g(b) > g(a)$이므로 열린구간 (a, b)에서 정의된 함수 $g(x)$의 치역은 $-4 \leq a < 0$, $0 < b < 4$ 이면 구간 $[-4, 4)$, $a < -4$, $0 < b < 4$이면 구간 $(g(a), 4)$, $-4 \leq a < 0$, $b \geq 4$이면 구간 $[-4, g(b))$이고, $a < -4$, $b \geq 4$이면 구간 $(g(a), g(b))$이므로 하나의 구간으로 이루어진다. 따라서 임의의 α, β $(a < \alpha, \beta < b)$에 대하여 $g(\alpha), g(\beta)$ 사이에 있는 임의의 값은 다시 함수 $g(x)$의 구간 (a, b)에서의 치역에 속한다.)

문항 ❷ (의예과)

1. 출제 의도

정적분의 개념을 충분히 이해하고 있는지와 부분적분법을 이용하여 주어진 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

- **(2-1)** 미분을 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있는지를 묻는다.
- **(2-2)** 정적분의 개념을 정확하게 이해하고 주어진 함수의 개형을 활용하여 정적분의 값의 부호를 알아낼 수 있는지 묻는다.
- **(2-3)** (2-1)과 (2-2)의 결과를 활용하여 주어진 정적분의 값을 평가할 수 있는지를 묻는다.

3. 채점 기준

(2-1)
- $x > 0$일 때 $\ln x \leq x - 1$가 성립하는 것을 보이면 된다는 것을 기술하면 4점
- 위의 부등식을 미분을 이용하여 증명하면 4점

(2-2)
- $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$에서 $\sin(2n\pi x)\ln(x+1) \leq \sin(2n\pi x)\ln\left(\frac{2k+1}{2n} + 1\right)$ 을 보이면 6점
- $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(2n\pi x)\ln(x+1)\,dx \leq 0$ 임을 보이면 4점
- $\int_0^1 \sin(2n\pi x)\ln(x+1)\,dx \leq 0$ 임을 보이면 2점

(2-3)
- $f(x)\ln f(x) \geq f(x)\ln(x+1) + f(x) - x - 1$가 성립함을 보이면 5점
- $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx$, $\int_0^1 (x+1)\ln(x+1)dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$ 를 계산하면 5점
- $\int_0^1 f(x)\ln f(x)dx \geq \ln 4 - \frac{3}{4}$ 임을 보이면 5점

4. 예시 답안

(2-1) $g(x) = x - \ln x - 1$ 로 두면 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$이므로 제시문 (가)에 의하여 $x < 1$일 때 $g(x)$는 감소하고 $x > 1$일 때 $g(x)$는 증가한다. 따라서 $g(x) \geq g(1) = 0$이다. 즉 모든 양수 x에 대하여 $\ln x \leq x - 1$ 이다.

그러므로 $a \ln \frac{b}{a} \leq a\left(\frac{b}{a} - 1\right) = b - a$ 이다.

(별해) 곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(1, 0)$에서 접선의 방정식은 $y = x - 1$이므로 모든 양수 x에 대하여 $\ln x \leq x - 1$ 이다.

따라서 $a \ln \frac{b}{a} \leq a\left(\frac{b}{a} - 1\right) = b - a$ 이다.

(2-2) $\ln(x+1)$은 증가하므로 $k=0,1,2,\ldots,n-1$일 때

구간 $\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]$ 에서 $\sin(2n\pi x)\ln(x+1)\le \sin(2n\pi x)\ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)$,

구간 $\left[\frac{2k+1}{2n},\frac{k+1}{n}\right]$에서 $\sin(2n\pi x)\ln(x+1)\le \sin(2n\pi x)\ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)$ 이다.

그러므로 구간 $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ 에서

$$\sin(2n\pi x)\ln(x+1)\le \sin(2n\pi x)\ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)$$

이고 제시문 (다)에 의하여

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\sin(2n\pi x)\ln(x+1)dx\le \ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\sin(2n\pi x)dx=0$$

이다. 따라서 $\int_0^1\sin(2n\pi x)\ln(x+1)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\sin(2n\pi x)\ln(x+1)dx\le 0$ 이다.

(2-3) (2-1)의 결과를 이용하면 $f(x)\ln\frac{x+1}{f(x)}\le x+1-f(x)$임을 알 수 있다. 그러므로

$$f(x)\ln f(x)\ge f(x)\ln(x+1)+f(x)-x-1$$

이다. 제시문 (다)에 의하여

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)dx\ge \int_0^1\{(x-\sin(2n\pi x)+1)\ln(x+1)+f(x)-x-1\}dx$$

이다. (2-2)의 결과와 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x+1)dx$, $\int_0^1(x+1)\ln(x+1)dx=\ln4-\frac{3}{4}$ 임을 이용하면

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)dx\ge \ln4-\frac{3}{4}$$ 임을 안다.

문항 ❸ (의예과)

1. 출제 의도

이 문제는 명제와 상황을 잘 이해하고 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 수학적 귀납법을 이용하여 논리적으로 명제를 증명할 수 있는지도 평가한다.

2. 문항 해설

- **(3-1)** 원소의 개수가 2 이하인 집합은 조화로운 집합이 될 수 없음을 증명하는 문제이다.
- **(3-2)** 배수의 역수의 의미를 이해하면 문제를 해결할 수 있다. 주어진 명제를 문제에 맞게 변형시켜 응용할 수 있는지를 평가한다.
- **(3-3)** 임의의 조화로운 집합 A에 (a)의 결과를 이용하면 조화로운 집합의 크기를 하나씩 늘려나갈 수 있다. 이때 집합의 정의에 따라 중복된 원소를 포함할 수 없으므로 (a)를 A의 어떤 원소에 적용시킬지 판단해야 한다. 이 문제에서는 이런 판단 능력을 평가한다. 또한 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명하는 능력을 평가한다.

3. 채점 기준

(3-1)
- 2 이상인 자연수의 역수는 1보다 작다는 것을 이용하여 $n(A)=1$인 조화로운 집합 A가 존재하지 않음을 증명하면 1점
- 2 이상인 서로 다른 두 자연수의 역수의 합은 1보다 작다는 것을 이용하여 $n(A)=2$인 조화로운 집합 A가 존재하지 않음을 증명하면 4점

(3-2)
- (a) $B=\{2\}\cup\{2a \mid a\in A\}$를 찾으면 3점
- (a) B의 원소의 역수의 합이 1임을 증명하면 3점
- (a) $\{2a \mid a\in A\}$에 2가 포함되지 않음을 보이면 1점
- (b) 주어진 조화로운 집합과 (a)에서 사용한 아이디어를 이용하여 조건을 만족하는 조화로운 집합을 찾으면 8점

(3-3)
- (a) 문제의 조건을 만족하는 순서쌍 (p,q)를 하나 찾으면 5점
- (b) 주어진 조화로운 집합에 (a)의 결과를 이용하여 원소를 하나 더 갖는 조화로운 집합을 만들면 5점
- (b) 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 완벽하게 증명하면 5점

4. 예시 답안

(3-1) 2 이상인 자연수의 역수는 항상 1보다 작으므로 1개의 원소로 이루어진 조화로운 집합은 존재하지 않는다.

또한, 2 이상인 서로 다른 두 자연수 a,b에 대하여 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<1$이므로 집합 $\{a,b\}$는 조화로운 집합이 될 수 없다.

따라서 조화로운 집합은 반드시 3개 이상의 원소를 포함해야 한다.

(3-2) (a) A가 서로 다른 n개의 자연수로 이루어졌다고 하고, $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$라 하자. 집합 $B=\{2,2a_1,2a_2,\dots,2a_n\}$이 문제의 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 증명하자. 먼저, $1\not\in A$이므로 $2,2a_1,2a_2,\dots,2a_n$은 모두 다른 자연수이다. 그리고 B의 정의에 의하여, 임의의 $x\in A$에 대하여 $2x\in B$임을 알 수 있다. 또한, A가 조화로운 집합이므로 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1$을 만족한다. 따라서 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이 성립하고,

B가 문제의 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 알 수 있다.

(b) $X=\{3,4,5,6,20\}$, $Y=\{3x\mid x\in X\}$라 하자. X의 원소 중 3의 배수는 6뿐인데, X는 2를 포함하지 않으므로 두 집합 X와 Y는 서로소이다. 그리고 X가 조화로운 집합이므로 Y의 원소의 역수의 합은 $\frac{1}{3}$이다. 집합 $A=(X-\{3\})\cup Y$가 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 보이자. 우선, $2,3\not\in A$는 자명하다.

A의 원소의 역수의 합은

$$(X\text{의 원소의 역수의 합})-\frac{1}{3}+(Y\text{의 원소의 역수의 합})=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1\text{이므로}$$

A는 조화로운 집합이다. 또한, $n(A)=n(X)+n(Y)-1=9$이므로 조화로운 집합 A는 문제의 조건을 만족한다.

(3-3) (a) $\frac{1}{m}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$은 $(p-m)(q-m)=m^2$과 동치인데, 이 등식은 $p-m=1$, $q-m=m^2$일 때 성립하므로,

$p=m+1$, $q=m^2+m$일 때 성립한다.

(b) 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자. $n=9$일 때, (3-2)에서 2와 3을 포함하지 않고 원소의 개수가 9인 조화로운 집합의 존재성을 증명하였다. $n>9$에 대하여, $n-1$일 때 명제가 성립한다고 가정하고, n일 때 성립함을 증명하자. $n-1$일 때 명제가 성립하므로 원소의 개수가 $n-1$이고 2, 3을 포함하지 않는 조화로운 집합 $X=\{a_1,a_2,\dots,a_{n-1}\}$이 존재한다. X의 원소 중 a_{n-1}이 가장 크다고 하자. 이제 다음 집합이 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 증명하자.

$A=(X-\{a_{n-1}\})\cup\{a_{n-1}+1,a_{n-1}(a_{n-1}+1)\}=\{a_1,a_2,\dots,a_{n-2},a_{n-1}+1,a_{n-1}(a_{n-1}+1)\}$

a_{n-1}이 X의 원소 중 가장 큰 원소이므로 $a_1,a_2,\dots,a_{n-2},a_{n-1}+1,a_{n-1}(a_{n-1}+1)$은 모두 다르고,

$a_{n-1}+1,a_{n-1}(a_{n-1}+1)$은 모두 3보다 크다. 따라서 A의 원소의 개수는 n이고, A는 2와 3을 포함하지 않는다.

한편, (3-3)(a)에 의하여 A의 원소의 역수의 합은 X의 원소의 역수의 합과 같고, X가 조화로운 집합이므로 A의 원소의 역수의 합은 1이 된다. 따라서 A는 n개의 원소를 갖고, 2, 3을 포함하지 않는 조화로운 집합이다.

그러므로 수학적 귀납법에 의하여 9이상인 모든 자연수 n에 대하여 원소의 개수가 n이고 2,3을 포함하지 않는 조화로운 집합이 존재한다.

2022학년도 논술성적 및 학생부교과 입시결과

• 본 입시결과는 2023학년도 수시모집 지원을 위한 참고자료일 뿐이며, 2023학년도 입시결과는 달라질 수 있음을 유념하시기 바랍니다.

• 본 입시결과는 2022학년도 논술우수자전형 최종등록자 기준 평균입니다.
• 본 자료에서의 학생부교과등급은 수험생의 이해를 돕기 위하여 학년별 가중치를 적용하지 않은 단순 평균, 최저등급입니다.
(이수단위 반영, 학년별 가중치 미반영)

① 인문

문제유형	모집인원	지원인원	경쟁률	실질 경쟁률	논술점수	학생부교과등급	
					평균	평균	최저
인문	175	4,514	25.8	20.7	83.88	4.58	6.58

모집단위	모집 인원	경쟁률	실질 경쟁률	최초합격자 등록률	추가합격자 예비번호	논술점수	학생부교과등급	
						평균	평균	최저
경영학과	27	31.5	24.8	85.2%	4	87.54	4.49	6.02
글로벌금융학과(인문)	6	22.2	15.7	100.0%	0	81.33	5.11	6.16
아태물류학부(인문)	16	25.4	21.3	87.5%	2	84.72	4.69	6.45
국제통상학과	14	27.6	24.0	100.0%	0	85.50	4.72	5.54
국어교육과	5	21.6	16.4	100.0%	0	82.80	4.13	4.60
사회교육과	5	25.0	20.6	80.0%	1	82.00	4.29	5.48
행정학과	14	24.2	19.8	85.7%	2	86.61	4.51	5.26
정치외교학과	10	22.4	17.7	90.0%	1	88.15	4.30	5.62
미디어커뮤니케이션학과	12	30.7	24.8	91.7%	1	84.13	4.39	4.90
경제학과	10	23.7	18.2	90.0%	1	87.15	4.78	5.57
한국어문학과	6	22.2	17.5	100.0%	0	81.08	4.51	5.71
사학과	5	21.8	17.2	100.0%	0	76.20	4.20	5.41
철학과	5	23.0	16.6	60.0%	2	88.50	4.88	5.89
중국학과	6	21.8	16.8	100.0%	0	84.75	5.64	6.58
일본언어문화학과	11	22.0	18.7	81.8%	2	76.64	4.97	5.94
영어영문학과	11	23.5	17.8	100.0%	0	79.00	4.33	6.52
문화콘텐츠문화경영학과	12	28.9	23.4	91.7%	1	78.79	4.21	5.41