2023학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후 ■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ	
	핵심개념 및 용어	미분계수, 함수의 최댓값과 최솟값, 두 직선의 수직 조건, 함수의 극한	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

- 문제지와 동일

3. 출제 의도

- 미분과 관련하여 접선의 방정식을 구할 수 있고, 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 극한 계산을 할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정” ■ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	제시문	성취기준1	[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학II)
		성취기준1	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ① 미분계수 [12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
		성취기준2	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
		성취기준3	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

2) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	권오남 외	교학사	2020	123	제시문	
수학	홍성복 외	지학사	2020	133	제시문	

5. 문항 해설

(1-1) 주어진 곡선을 정의하는 함수의 미분계수가 접선의 기울기가 됨을 이용하면 제시문에 의해서 접선의 방정식을 구하고 삼각형의 면적을 구하는 문제이다.

(1-2) 미분가능한 함수의 미분계수가 양수인 경우 그 주변에서 함수값이 증가하고, 음수인 경우 함수값이 감소하므로 도함수의 부호를 판별함으로써 최대, 최소를 구분하는 문제이다.

(1-3) 삼각형의 넓이를 내접원의 반지름과 세변의 길이를 이용하여 나타내면 내접원의 반지름을 주어진 변수로 나타내고, $\lim_{t\to\infty} 1/t = 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$임을 이용하여 주어진 극한을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(1-1)	직선 PQ의 방정식 $y=-e^{-t}(x-t)+e^{-t}$을 구하면	5점
	$A(t)$를 t의 식 $A(t)=\frac{(t+1)e^{-t}}{2}$으로 나타내면	5점
(1-2)	$(2t-1)A(t)$의 도함수 $\frac{1}{2}(2-t)(1+2t)e^{-t}$을 구하면	5점
	최댓값 $\frac{9}{2e^2}$를 구하면	5점
(1-3)	$r=\frac{(t+1)e^{-t}}{(\sqrt{t^2+(e^{-t})^2}+\sqrt{1+(e^{-t})^2}+t+1)}$ 을 구하면	3점
	$S=\frac{(1+e^{-2t})e^{-t}}{2}$을 구하면	3점
	극한값 1을 구하면	4점

7. 예시 답안

(1-1) 직선 PQ의 기울기는 $-e^{-t}$이고, (t,e^{-t})를 지나므로 직선 PQ의 방정식은 $y=-e^{-t}(x-t)+e^{-t}$이 되고, Q의 좌표는 $(t+1,0)$이 된다. 따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $A(t)$는 $A(t)=\frac{(t+1)e^{-t}}{2}$이 된다.

(1-2) 함수 $g(t)=(2t-1)A(t)=\frac{1}{2}(2t-1)(t+1)e^{-t}=\frac{1}{2}(2t^2+t-1)e^{-t}$이라 하면 $g'(t)=\frac{1}{2}(2-t)(1+2t)e^{-t}$이므로 $1\le t<2$에서 $g'(t)>0$이고 $2<t$에서 $g'(t)<0$이므로 $t=2$에서 최댓값을 갖는다.
따라서 $g(2)=\frac{9}{2e^2}$가 최댓값이 된다.

(1-3) 선분 OP의 길이는 $\sqrt{t^2+(e^{-t})^2}$, 선분 PQ의 길이는 $\sqrt{1+(e^{-t})^2}$, 선분 OQ의 길이는 $t+1$이다.
삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{(t+1)e^{-t}}{2}$이고 내접원의 반지름을 이용하여 삼각형 OPQ의 넓이를 표현하면 $\frac{1}{2}r(\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{QO})=\frac{(t+1)e^{-t}}{2}$이므로 $r=\frac{(t+1)e^{-t}}{(\sqrt{t^2+(e^{-t})^2}+\sqrt{1+(e^{-t})^2}+t+1)}$이다.

직선 PR은 직선 PQ에 수직이므로 제시문에 의하여 직선 PR의 기울기는 e^t이고 점 $P(t,e^{-t})$을 지나므로 직선 PR의 방정식은 $y=e^t(x-t)+e^{-t}$이다. 점 R의 좌표는 $(t-e^{-2t},0)$이다. 그러므로 선분 RQ의 길이는 $1+e^{-2t}$이므로 삼각형 PQR의 넓이는 $S=\frac{(1+e^{-2t})e^{-t}}{2}$이다.

따라서 구하고자 하는 극한은
$\lim_{t\to\infty}\frac{r}{S}=\lim_{t\to\infty}\frac{2(t+1)}{(\sqrt{t^2+(e^{-t})^2}+\sqrt{1+(e^{-t})^2}+t+1)(1+e^{-2t})}=1$이다.

(별해) 직선 PR은 직선 PQ에 수직이므로 제시문에 의하여 직선 PR의 기울기는 e^t이고 점 $P(t,e^{-t})$을 지나므로 직선 PR의 방정식은 $y=e^t(x-t)+e^{-t}$이므로 점 R의 좌표는 $(t-e^{-2t},0)$이다.
그러므로 $\overline{RQ}=(t+1)-(t-e^{-2t})=1+e^{-2t}$이다.
삼각형의 넓이를 내접원의 반지름에 대하여 표현하면 $\frac{1}{2}r(\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{RQ})$이고, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{OP}+\overline{PQ}}{\overline{OQ}}=1$이므로 점 P에서 x축까지의 거리를 h라 하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r}{S}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\overline{OQ}\cdot h}{\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{OQ}}}{\frac{1}{2}\overline{RQ}\cdot h}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1}=1\text{이다.}$$

2023학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ	
	핵심개념 및 용어	극댓값과 극솟값, 삼차방정식, 항등식, 정적분, 함수의 극한	
예상 소요 시간	(40)분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

- 문제지와 동일

3. 출제 의도

- 두 곡선 사이의 관계를 방정식으로 이해하고, 다시 방정식의 해를 함수와 상수함수의 관계로 해석할 수 있는지를 평가한다. 또한 항등식의 성질을 이용하여 두 교점의 위치를 알 때, 나머지 교점의 위치를 확인하고 극한을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정” ■ 수학 □ 수학 I ■ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(가)	성취기준1	[수학] - (1) 문자와 식 - ③ 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(나)	성취기준1	[수학] - (1) 문자와 식 - ② 나머지정리 [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
	(나)	성취기준2	[수학] - (1) 문자와 식 - ① 다항식의 연산 [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학II)
	(다)	성취기준1	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용 [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	김원경 외	비상	2020	73	(가)	재구성
수학	황선욱 외	미래엔	2020	84	(가)	재구성
수학	김원경 외	비상	2020	52	(나)	재구성
수학	황선욱 외	미래엔	2020	61	(나)	재구성
수학II	김원경 외	비상	2020	130	(다)	재구성
수학II	이준열 외	천재교육	2020	137	(다)	재구성

5. 문항 해설

(2-1) 두 곡선의 교점의 수를 그래프의 개형을 이용하여 파악하는 문제이다.

(2-2)(a) 두 곡선의 교점의 x좌표를 제시문을 이용하여 구하는 문제이다.

(2-2)(b) 제시문을 이용하여 극한을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(2-1)	$x^3-3(x+4)^2$이 $x=-2$에서 극댓값 -20, $x=4$에서 극솟값 -128을 가지는 것을 확인하면	7점
	q의 범위 $q>-20$, $q<-128$을 구하면	3점
(2-2)(a)	1보다 큰 근 $1+\sqrt{1-2p}$를 구하면	5점
	나머지 근 $1-2\sqrt{1-2p}$를 구하면	5점
(2-2)(b)	$q=-3p^2+(1+\sqrt{1-2p})^2(1-2\sqrt{1-2p})$를 구하면	5점
	$A=\dfrac{27}{4}(1-2p)^2$을 구하면	5점
	극한값이 $-\dfrac{1}{9}$임을 구하면	5점

7. 예시 답안

(2-1) 두 함수의 그래프가 한 교점에서 만나는 경우는 방정식 $x^3-3(x+4)^2-q=0$이 한 실근만을 갖는 경우와 동치이다. 또한 이는 상수함수 $y=q$의 그래프와 함수 $y=x^3-3(x+4)^2$의 그래프가 한 점에서 만나는 경우와

같다. 즉, 실수 q의 값은 함수 $y=x^3-3(x+4)^2$의 극댓값보다 크거나 극솟값보다 작아야 한다.
$y'=3(x^2-2x-8)=3(x-4)(x+2)=0$이므로 함수 $y=x^3-3(x+4)^2$는 $x=-2$에서 극댓값 -20, $x=4$에서 극솟값 -128을 각각 갖는다. 따라서 구하고자 하는 q의 값의 범위는 $q<-128$ 또는 $q>-20$이다.

(2-2) (a) (2-1)에서와 같이 두 그래프가 $x=t$에서 동일한 접선을 갖는 경우, $3t^2=6(t-p)$을 만족하고 $t>1$이므로 $t=1+\sqrt{1-2p}$이다. 제시문 (가), (나)로부터 세 근의 합은 반드시 3이어야 한다. 중근이 $1+\sqrt{1-2p}$이므로 나머지 한 근은 $1-2\sqrt{1-2p}$이다. 따라서 교점의 x좌표는 $1+\sqrt{1-2p}, 1-2\sqrt{1-2p}$가 된다.

(2-2) (b) 제시문 (나)로부터 $(1+\sqrt{(1-2p)})^2(1-2\sqrt{1-2p})=q+3p^2$이므로
$q=(1+\sqrt{1-2p})^2(1-2\sqrt{1-2p})-3p^2$이다. 또한 두 근의 p에 관한 식으로부터 제시문 (다)에 의해
$A=\dfrac{(1+\sqrt{1-2p}-(1-2\sqrt{1-2p}))^4}{12}=\dfrac{27(1-2p)^2}{4}$을 얻는다.
따라서 $\lim\limits_{p\to-\infty}\dfrac{q}{A}=\lim\limits_{p\to-\infty}\dfrac{4\{(1+\sqrt{1-2p})^2(1-2\sqrt{1-2p})-3p^2\}}{27(1-2p)^2}=\dfrac{4\cdot(-3)}{27\cdot 4}=-\dfrac{1}{9}$.

2023학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분	
	핵심개념 및 용어	부분적분법, 곡선의 볼록	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

- 문제지와 동일

3. 출제 의도

- 함수의 그래프로 주어지는 부분의 넓이가 최대가 되는 경우를 부분적분법에 의해 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정" □ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	**관련 제시문**	**성취기준**	**과목명: (미적분)**
	(가)	성취기준 1	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	(나)	성취기준 2	[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

2) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분	이준열외	㈜교학사	2020	155-159	(가)	
미적분	권오남외	㈜교학사	2020	158-161	(가)	
미적분	이준열외	천재교육	2020	112-116	(나)	
미적분	권오남외	㈜교학사	2020	112-119	(나)	

5. 문항 해설

두 함수의 그래프에 의해 결정되는 부분의 넓이가 최대가 되는 경우를 구하는 문제이다. 함수의 도함수, 이계도함수를 통하여 함수의 개형을 관찰하고, 주어진 부분의 넓이를 부분적분법을 이용하여 계산한다. 미분을 이용하여 주어진 부분의 넓이가 최대가 되는 때를 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$x=\frac{\pi}{2}$일 때 곡선 $y=x\sin x$에 접하는 직선이 원점을 지나는 것을 확인하면	5점
	t의 범위가 $\frac{\pi}{2}<t<\pi$임을 보이면	5점
(3-2)	$\int x\sin x dx = -x\cos x+\sin x + C$를 구하면	5점
	$S=-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+1\right)\pi-\sqrt{2}$ 를 구하면	5점
(3-3)	S는 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값을 갖는 것을 보이면	5점
	$\frac{dS}{dt}=t\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos t-\frac{\pi}{2}\sin t<0$임을 보이면	5점
	S의 최댓값 π를 구하면	5점

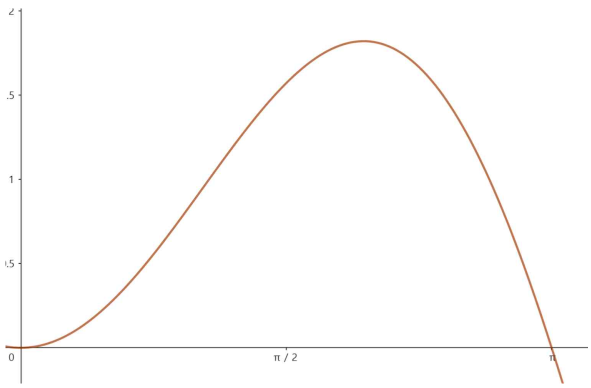
7. 예시 답안

(3-1) $y=x\sin x$일 때, $y'=\sin x+x\cos x$이다.

$y'=0$이면 $\tan x=-x$이므로 $\sin\alpha+\alpha\cos\alpha=0$인 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$가 존재한다.

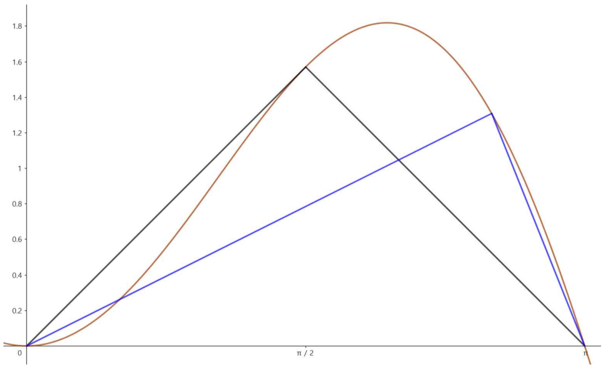
마찬가지로 $y''=2\cos x-x\sin x$이고 $2\cos\beta-\beta\sin\beta=0$인 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$가 존재한다.

따라서 그래프의 개형은 다음과 같다.



점 $(0, 0)$을 지나고 곡선 $y = x\sin x$에 접하는 직선을 구해보자. 곡선 $y = x\sin x$의 $x = t$에서의 접선은 $y - t\sin t = (\sin t + t\cos t)(x - t)$이고, $(0, 0)$을 지나므로 $t^2\cos t = 0$이고 $t = 0,\ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots$ 이다.

따라서 그래프의 개형으로부터 $g(t) = 4$인 t의 범위는 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$이다.

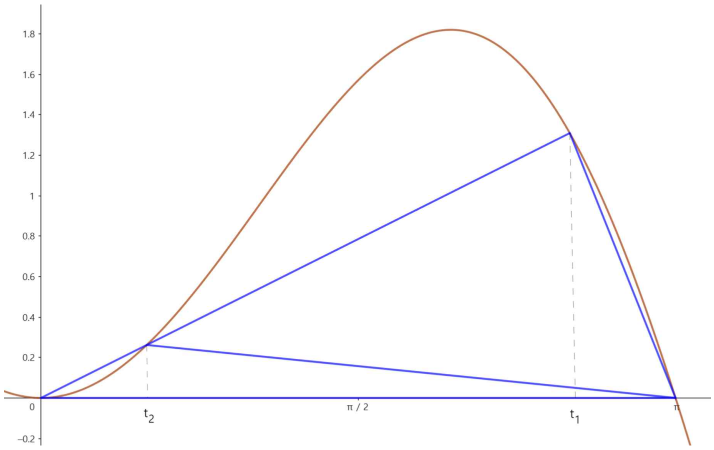


(3-2) 제시문 (가)에 의해 $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$이므로

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - x\sin x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left\{x\sin x + \frac{\sqrt{2}}{6}(x-\pi)\right\}dx \\
&= \left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + x\cos x - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-x\cos x + \sin x + \frac{\sqrt{2}}{12}(x-\pi)^2\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 1\right)\pi - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

이다.

(3-3) $t = t_1 > \frac{\pi}{2}$이면 함수 $y = f(x)$의 그래프는 곡선 $y = x\sin x$와 $x = t_2\left(0 < t_2 < \frac{\pi}{2}\right)$일 때 만난다. 그래프에 의해 $t = t_2$일 때의 S는 $t = t_1$일 때의 S보다 크다. 그러므로 S는 $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$일 때 최댓값을 갖는다.



$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$이면 S는

$$S = \int_0^t \{(\sin t)x - x\sin x\}dx + \int_t^\pi \left\{x\sin x - \frac{t\sin t}{t-\pi}(x-\pi)\right\}dx$$
$$= t^2\sin t + 2t\cos t - \frac{\pi t}{2}\sin t - 2\sin t + \pi$$

이므로, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$일 때 $\dfrac{dS}{dt} = t\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos t - \dfrac{\pi}{2}\sin t < 0$이다.

따라서 S는 $t=0$일 때 최댓값 π를 갖는다.

[별해] $t = t_1 > \dfrac{\pi}{2}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y = x\sin x$와 $x = t_2\left(0 < t_2 < \dfrac{\pi}{2}\right)$일 때 만난다. 그래프에 의해 $t = t_2$일 때의 S는 $t = t_1$일 때의 S보다 크다. 그러므로 S는 $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$일 때 최댓값을 갖는다.

$0 < t \le \dfrac{\pi}{2}$라고 하고, $S_0 = \displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx = \pi$라고 하자.

두 점 $(t,0)$, $(t, t\sin t)$을 각각 P, P_0이라고 하고, 원점을 O, 점 $(\pi, 0)$을 Q라고 하면,

그래프의 개형으로부터

$$S_0 - S > \int_t^\pi x\sin x\,dx - S > \text{삼각형 } P_0PQ\text{의 넓이} - \text{삼각형 } OP_0P\text{의 넓이} \ge 0$$

이므로 S는 $t=0$일 때 최댓값 $S_0 = \pi$를 갖는다.