2023학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 ■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II	
	핵심개념 및 용어	이차방정식의 근과 계수의 관계, 정적분의 활용	
예상 소요 시간	(30) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

- 문제지와 동일

3. 출제 의도

- 포물선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 구하는 법을 알고 있는지, 그리고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 그 결과를 간단히 정리할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학 I ■ 수학 II □ 미적분 □ 확률과 통계
관련 성취기준	

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학, 수학 II)
제시문	성취기준 1	[10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
	성취기준 2	[12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	류희찬 외	천재교과서	2020	60	제시문	
수학	황선욱 외	미래엔	2020	61	제시문	

5. 문항 해설

(1-1) 포물선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분을 이용하여 구하는 문제이다.

(1-2) 포물선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문제이다.

(1-3) $\sqrt{m^2+51}$이 정수가 되는 자연수 m의 값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준		배점
(1-1)	계산 실패로 답을 못 구한 경우		0점
	넓이를 $-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$로 나타내고 답도 구하면 (계산을 완성하지 못한 경우)		3점
	영역의 넓이를 $\frac{k^3}{6}$로 올바르게 구하면		7점
(1-2)	$S=\frac{1}{6}(m^2+51)^{\frac{3}{2}}$를 구하면		10점
(1-3)	$\sqrt{m^2+51}$이 정수가 되어야 한다는 사실을 언급하면		3점
	$m=7$을 구하면 (계산 없어도)	1. 2번 답이 틀린 경우 이 부분 최대 점수는 7점 2. $m=7, 25$를 답만 쓴 경우 최대 5점	2점
	$m=25$를 구하면		10점

7. 예시 답안

(1-1) $\beta+\alpha=-a$, $\beta\alpha=b$라 하면 근의 공식으로부터 $k=\sqrt{a^2-4b}$이고 $\beta^2-\alpha^2=(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=-ak$이다. $\beta^3-\alpha^3=(\beta-\alpha)((\beta+\alpha)^2-\beta\alpha)=k(a^2-b)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2-ax-b)dx=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{a}{2}(\beta^2-\alpha^2)-b(\beta-\alpha)$$

$$=-\frac{1}{3}k(a^2-b)+\frac{a}{2}\cdot ak-bk=\frac{1}{6}k(a^2-4b)=\frac{1}{6}k^3$$

이다.

[별해] 구하고자 하는 넓이는

$$-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\int_{0}^{\beta-\alpha}x(x-\beta+\alpha)dx=\frac{-(\beta-\alpha)^3}{3}+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}=\frac{k^3}{6}$$

이다.

(1-2) $x^2-mx-\frac{51}{4}=0$의 두 근은 $x=\frac{m\pm\sqrt{m^2+51}}{2}$이므로 $\beta-\alpha=\sqrt{m^2+51}$이다. 따라서 (1-1)에 의해 $S=\frac{1}{6}(m^2+51)^{\frac{3}{2}}$이다.

(1-3) 자연수 m에 대해 $\frac{1}{6}(m^2+51)^{\frac{3}{2}}$이 유리수가 되려면 $\sqrt{m^2+51}$이 정수가 되어야 한다. $\sqrt{m^2+51}=M$이라 하면, $M^2-m^2=51$을 얻는다. 즉, $(M+m)(M-m)=51=3\times17$ 이다.
이때 $M+m>M-m$이므로
(i) $M-m=3$인 경우: $M+m=17$이 되고 따라서 $m=7$이다.
(ii) $M-m=1$인 경우: $M+m=51$이 되고 따라서 $m=25$이다.
따라서 $m=7, 25$이다.

2023학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 □ 1번 ■ **2번(의예과 1번과 동일)** □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분	
	핵심개념 및 용어	부분적분법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

- 문제지와 동일

3. 출제 의도

- 함수의 그래프로 주어지는 부분의 넓이가 최소가 되는 경우를 부분적분법에 의해 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** □ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분)
	(가),(나)	성취기준 1	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분	이준열외	천재교육	2020	155-159	(가), (나)	
미적분	권오남외	㈜교학사	2020	158-161	(가), (나)	

5. 문항 해설

- 곡선과 직선에 의해 결정되는 부분의 넓이가 최소가 되는 경우를 구하는 문제이다. 함수의 미분을 통하여 함수의 개형을 관찰하면 주어진 부분의 넓이는 직선이 곡선에 접할 때 최소임을 알고 영역의 넓이를 부분적분법을 이용하여 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(2-1)	곡선 $y=f(x)$의 점$(t,f(t))$에서의 접선 $y-(t-2)^2e^t=t(t-2)e^t(x-t)$를 구하면	5점
	두 접선 $y=0$, $y=-ex+2e$를 구하면	5점
(2-2)	$\int(x-2)^2e^xdx=(x^2-6x+10)e^x+C$를 구하면	5점
	$S=16-2e^2$을 구하면	5점
(2-3)	$g(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$일 때 S가 최소임을 보이면	5점
	S의 최솟값이 $\frac{27}{4}\sqrt{e}-2e^2+\frac{17}{e}$임을 보이면	5점

7. 예시 답안

(2-1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선은

$$y-(t-2)^2e^t=t(t-2)e^t(x-t)$$

이다. 이 직선이 $(2,0)$을 지나므로 $t=1$이거나 $t=2$이다.
따라서 구하고자 하는 직선은

$$y=0, \qquad y=-ex+2e$$

이다.

(2-2) $f'(x)=x(x-2)e^x$이므로 $a=0$, $b=2$이다. 제시문 (가)의 부분적분법을 이용하면 $\int xe^xdx=(x-1)e^x+C$이므로 제시문 (나)에 의해

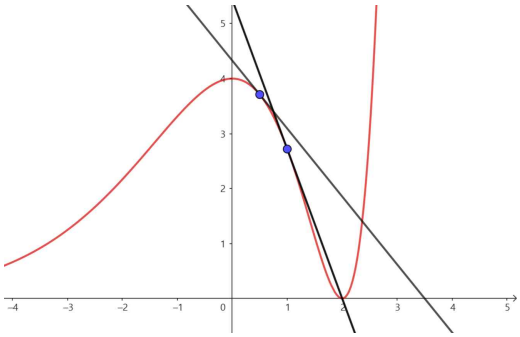
$$\int(x-2)^2e^xdx=(x^2-6x+10)e^x+C$$

이다. 그러므로

$$S=\int_0^2[6-3x-(x-2)^2e^x]dx=\left[6x-\frac{3}{2}x^2-(x^2-6x+10)e^x\right]_0^2=16-2e^2$$

이다.

(2-3) S가 최소일 때, 직선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 접하므로 $g(x)=f(t)+f'(t)(x-t)$로 쓸 수 있다. (2-1)의 결과와 함수 $y=f(x)$의 그래프에 의해 $-1\le t\le 1$이다.



한편 $g(x)=f(t)+f'(t)(x-t)$일 때의 S를 $h(t)$로 두면

$$h(t)=\int_{-1}^{2}[f(t)+f'(t)(x-t)-f(x)]\,dx=3f(t)+\left(-3t+\frac{3}{2}\right)f'(t)-\int_{-1}^{2}f(x)dx$$

이고

$$\frac{dh}{dt}=\left(-3t+\frac{3}{2}\right)f''(t)=-3\left(t-\frac{1}{2}\right)(t^2-2)e^t$$

이다. 따라서 S는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값

$$3f\left(\frac{1}{2}\right)-\int_{-1}^{2}f(x)dx=\frac{27}{4}\sqrt{e}-\left[(x^2-6x+10)e^x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}\sqrt{e}-2e^2+\frac{17}{e}$$

을 갖는다.

(별해) $g(x)$가 일차식이므로 $\int_{-1}^{2}g(x)dx=3g\left(\frac{1}{2}\right)$이다. 그러므로

$$S=3g\left(\frac{1}{2}\right)-\int_{-1}^{2}f(x)dx\geq 3f\left(\frac{1}{2}\right)-\int_{-1}^{2}f(x)dx=\frac{27}{4}\sqrt{e}-2e^2+\frac{17}{e}$$

이다. $g(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$이면 $g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 (2-1)의 결과에 의해 구간 $[-1,2]$에서 $g(x)\geq f(x)$이므로 위 부등식에서 등호가 성립한다.

따라서 S의 최솟값은 $\frac{27}{4}\sqrt{e}-2e^2+\frac{17}{e}$이다.

2023학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ	
	핵심개념 및 용어	우극한, 함수의 증가와 감소, 최솟값, 평균값 정리	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

- 문제지와 동일

3. 출제 의도

- 이 문항은 함수의 증가와 감소, 좌극한/우극한, 평균값 정리 등을 잘 이해하고 관련된 교과 내용을 이해하고 사고할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** □ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅱ)
		성취기준 1	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	제시문	성취기준 2	[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

2) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2020	83-99	제시문	
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	78-93	제시문	

5. 문항 해설

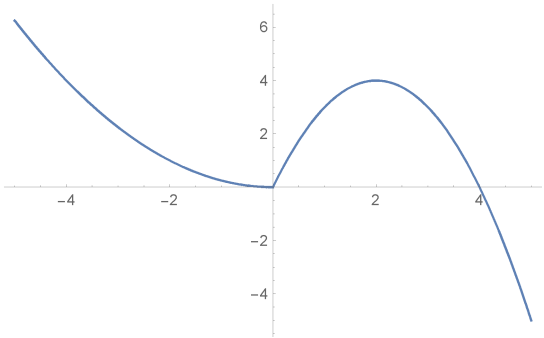
(3-1) 함수의 증가/감소라는 개념을 잘 이해하고 있는지 평가하는 문제이다.
(3-2) 함수의 우극한/좌극한 및 최댓값/최솟값을 구하는 문제이다.
(3-3) 평균값의 정리가 성립하는 상황과 성립하지 않는 조건을 파악할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(3-1)	$f(x)$의 그래프의 개형을 파악하면	5점
	$a < -4$ 또는 $a > 4$임을 정확히 구하면	5점
(3-2)	$g(x)$의 그래프의 개형을 파악하면	3점
	k의 범위에 따라 $\lvert g(x)-k \rvert$의 특징을 파악하면	3점
	$0 \le k < 1$임을 구하면	4점
(3-3)	평균값의 정리를 이용하여 $a<0, b>0$이어야 한다는 사실을 파악하면	5점
	직선의 기울기의 성질과 $g(x)$의 그래프를 이용하여 $b=1,2$임을 파악하면	5점
	$(-4,2), (-3,1), (-2,1), (-1,1)$을 구하면	5점

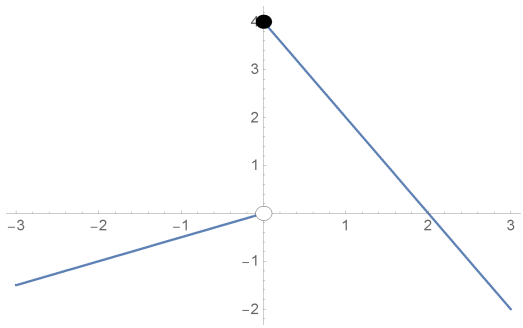
7. 예시 답안

(3-1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

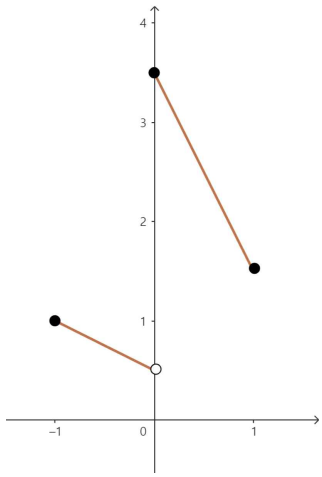


조건을 만족시키려면 $f(x)$는 a를 포함한 구간에서 감소해야 하므로 $a<0$ 또는 $a>2$이어야 한다.
그런데 $-4 \le a < 0$이면 $f(a) \le f(2)$이고, $2 < a \le 4$이면 $f(0) \le f(a)$이므로 조건을 만족하지 않는다.
한편 $a < -4$ 또는 $a > 4$이면 문제의 조건을 만족하므로 구하려는 범위는 $a < -4$ 또는 $a > 4$이다.

(3-2) 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



문제의 조건을 만족하려면 구간 $[-1,1]$에서 함수 $g(x)$의 그래프 위의 점 또는 점 $(0,0)$ 중에서 직선 $y=k$에 가장 가까운 점이 $(0,0)$ 하나여야 한다. 따라서 구하려는 범위는 $0 \le k < 1$이다. 예를 들어 $k=\frac{1}{2}$이면 $|g(x)-k|$의 그래프는 다음과 같은 모양이다.



k가 이 범위 안에 있지 않다면 구간 $[-1,1]$에서 $g(x)$의 최솟값은 $k<-\frac{1}{2}$이면 $-\frac{1}{2}-k$이고, $-\frac{1}{2}<k<0$이면 0, $1 \le k \le 2$이면 $2-k$, $2<k \le 4$이면 0, $k>4$이면 $k-4$이다.

(3-3) $a<b \le 0$ 또는 $0 \le a<b$이면 평균값의 정리에 의하여 문제의 조건은 성립하지 않는다. 따라서 문제의 조건을 만족하려면 $a<0, b>0$이어야 한다.

$a<0$, $b>2$이면 기울기 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 두 실수 $\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=\frac{f(b)}{b}$와 $\frac{f(0)-f(a)}{0-a}=\frac{f(a)}{a}$ 사이의 값이다. (또는 두 값이 같은 경우 두 값과 같다.) 평균값 정리에 의하여 두 실수는 각각 $g(c_1)$, $g(c_2)$인 $a<c_1<0$, $0<c_2<b$와 같은데, (3-2)의 함수 $y=g(x)$의 그래프로부터 이 두 실수 $g(c_1)$, $g(c_2)$ 사이에 있는 어떠한 값도 어떤 $g(c)$ $(a<c<b)$의 값과 같다.

따라서 (3-2)의 함수 $y=g(x)$의 그래프로부터 문제의 조건을 만족하려면 $0<b \le 2$, $a<0$이고 $0 \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le -2b+4$이어야 한다. $b=1$인 경우 $a=-1,-2,-3$가 가능하고, $b=2$인 경우 $a=-4$이다.

따라서 구하려는 순서쌍은 $(-4,2), (-3,1), (-2,1), (-1,1)$이다.

2023학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 ■ **2번(의예과)** □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분	
	핵심개념 및 용어	연속함수, 사잇값 정리, 정적분, 부분적분법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

- 문제지와 동일

3. 출제 의도

- 이 문항은 정적분과 함수의 그래프와 관련된 넓이로 해석하여 정적분으로 나타내진 함수의 증가와 감소, 사잇값의 정리를 잘 이해하고 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** □ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계
관련 성취기준	

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅱ, 미적분)
(가)	성취기준 1	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
(나)	성취기준 2	[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준 3	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.

2) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분	권오남 외	㈜교학사	2020	151-161	(가)	
미적분	이준열 외	천재교육	2020	155-157	(가)	
수학Ⅱ	권오남 외	㈜교학사	2020	40-41	(나)	
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	38-39	(나)	

5. 문항 해설

(2-1) 부분적분법을 이용하여 간단한 함수의 정적분을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(2-2) (a) 정적분을 그래프와 관련된 넓이로 해석하여 정적분으로 주어진 함수의 증가/감소를 이해하는지 평가하는 문제이다.

(b) 상황에 적절한 정적분으로 주어진 함수를 구성해서 사잇값의 정리를 활용한 증명을 할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(2-1)	$\int_{n}^{n+1} f(x)dx = (-1)^n(2n+1)$를 구하면	5점
(2-2) (a)	최댓값/최솟값일 때 a,b,c가 정수여야 함을 파악하면	3점
	최댓값/최솟값을 구하는 정확한 논리를 제시하면	3점
	$M=20,\ m=-16$을 구하면	4점
(2-2) (b)	$h(x)=\int_{3+x}^{4+x} f(t)dt-\int_{4+x}^{5+x} f(t)dt$ 등의 적당한 연속함수를 찾으면	7점
	사잇값의 정리를 언급하여 증명을 완성하면	3점

7. 예시 답안

(2-1) 부분적분을 이용하면

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \left[-x\cos\pi x\right]_{n}^{n+1} + \int_{n}^{n+1}\cos\pi x\,dx$$
$$= n\cos n\pi - (n+1)\cos(n+1)\pi = (-1)^n n - (-1)^{n+1}(n+1)$$
$$= (-1)^n(2n+1)$$

이다.

(2-2) (a) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$가 최대가 되는 a,b,c의 값을 각각 a_1,b_1,c_1이라고 하자. 그러면 a_1,b_1,c_1은 모두 정수이다. 왜냐하면 a_1이 정수가 아니라면 $f(a_1)>0$ 또는 $f(a_1)<0$인데, $f(a_1)>0$이라면 a의 값이 a_1보다 약간 작아지면 $\int_a^{b_1} f(x)\,dx - \int_{b_1}^{c_1} f(x)\,dx$의 값은 더 커지고, $f(a_1)<0$이라면 a의 값이 a_1보다 약간 커지면 $\int_a^{b_1} f(x)\,dx - \int_{b_1}^{c_1} f(x)\,dx$의 값이 더 커지기 때문이다. 마찬가지 이유로 b_1, c_1도 정수이다.

이때 a_1은 짝수이다. 왜냐하면 a_1이 홀수라면 구간 (a_1-1, a_1)에서 $f(x)>0$이므로 $\int_{a_1-1}^{b_1} f(x)\,dx - \int_{b_1}^{c_1} f(x)\,dx$의 값이 $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx - \int_{b_1}^{c_1} f(x)\,dx$보다 크기 때문이다. 마찬가지로 b_1은 홀수이고 c_1은 짝수이다.

b_1이 홀수이고 a_1, c_1이 짝수일 때 $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx - \int_{b_1}^{c_1} f(x)\,dx$이 최대이려면 $b_1 - a_1 = 1$이어야 한다. 왜냐하면 고정된 홀수 b_1에 대하여 $\int_a^{b_1} f(x)\,dx$는 a $(a<b_1)$가 짝수 중에서 $a=b_1-1$일 때 최대이기 때문이다.

이 중에서 $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$는 a,b,c가 각각 $4,5,6$일 때 최대이고 $M=20$이다.

마찬가지로 $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$의 최솟값은 b가 짝수이고 $b-a=1$일 때 얻어진다. 실제로 $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$는 a,b,c가 각각 $3,4,5$일 때 최소이고 $m=-16$이다.

(b) 함수 $h(x)$를 닫힌구간 $[0,1]$에서 $h(x) = \int_{3+x}^{4+x} f(t)\,dt - \int_{4+x}^{5+x} f(t)dt$라고 정의하면,

$h(x) = 2\int_3^{4+x} f(t)\,dt - \int_3^{5+x} f(t)\,dx - \int_3^{3+x} f(t)\,dt$이므로 적분과 미분의 관계로부터 $h(x)$는 미분가능하므로 연속이고 $h(0)=m$, $h(1)=M$이므로, 제시문(나) 사잇값의 정리에 의하여 $m<k<M$인 임의의 실수 k에 대하여 $h(t)=k$인 t가 구간 $(0,1)$에 존재한다. 모든 $0<t<1$에 대하여 $h(t)$는 항상 $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$ (단, $0<a<b<c<6$)의 꼴이므로, 문제와 같이 $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = k$를 만족하는 실수 a,b,c 가 존재한다.

[(2-2) (b)의 별해] 구간 $[4,5]$에서 $h_1(x) = \int_3^x f(t)\,dt - \int_x^5 f(t)\,dt$라고 하면, 구간에서 $h_1(x)$는 연속이고 $h_1(4)=-16$, $h_1(5)=2$이므로 $-16<k<2$일 때 $h_1(x)=k$인 $x(4<x<5)$가 사잇값의 정리에 의해 존재한다. 한편 구간 $[5,6]$에서 $h_2(x) = \int_4^x f(t)\,dt - \int_x^6 f(t)\,dt$라고 하면, 구간에서 $h_2(x)$는 연속이고 $h_2(5)=20$, $h_2(6)=-2$이므로 $-2<k<20$일 때 $h_2(x)=k$인 $x(5<x<6)$가 사잇값의 정리에 의해 존재한다. 두 사실로부터 문제와 같이 $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = k$를 만족하는 실수 a,b,c (단, $0<a<b<c<6$)가 존재한다.

2023학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 문항카드
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ **3번(의예과)**
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I	
	핵심개념 및 용어	경우의 수, 귀류법, 함수, 일대일대응	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

- 문제지와 동일

3. 출제 의도

- 지문에서 주어진 상황을 논리적으로 해석하고 분석하는 능력을 평가한다. 문제에서 주어진 조건으로부터 문제 해결에 필요한 핵심 아이디어를 찾고 활용하는 능력을 평가한다. 또한, 수의 기본적인 성질(정수의 짝수, 홀수, 약수, 배수 관계 등)을 다루는 능력과 귀류법을 이용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 ■ 수학 Ⅰ □ 수학 Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계
관련 성취기준	

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학, 수학I)
(가)	성취기준 1	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
(나)	성취기준 2	[12수학I 03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
(다)	성취기준 3	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.

2) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	김원경 외	비상교육	2020	245	(가)	
수학	류희찬 외	천재교과서	2020	260	(가)	
수학I	김원경 외	비상교육	2020	139	(나)	재구성
수학I	박교식 외	동아출판	2020	127	(나)	재구성
수학	김원경 외	비상교육	2020	190	(다)	
수학	류희찬 외	천재교과서	2020	201	(다)	

5. 문항 해설

(3-1) 공평한 함수의 개수를 $f(1),\cdots,f(n)$이 가질 수 있는 값의 경우의 수를 이용하여 구하는 문제이다.

(3-2) 주어진 조건을 변형하여 치역의 원소의 개수가 2인 공평한 함수를 찾는 문제이다.

(3-3) 자연수의 약수 배수 관계를 고려하여, n이 짝수일 때는 공평한 일대일대응이 존재할 수 없음을 증명하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(3-1)	공평한 함수의 개수를 구하는 타당한 방법을 제시하면	3점
	공평한 함수의 개수가 $n!$임을 보이면	7점
(3-2) (a)	$g(x)$가 공평한 함수임을 보이면	5점
(3-2) (b)	$b-a$가 $5,7,8$인 경우에 불가능함을 명확하게 보이면	6점
	$b-a$가 6인 공평한 함수를 하나 찾으면	4점
(3-3)	동전 R_i가 점 P_k로 이동할 때 $i+f(i)-k$가 n의 배수임을 보이면	4점
	동전이 이동한 거리의 합이 $\frac{n(n+1)}{2}$임을 보이면	3점
	n이 짝수일 때 $\frac{n(n+1)}{2}$이 n의 배수가 아님을 이용하여 공평한 함수가 존재하지 않음을 보이면	3점

7. 예시 답안

(3-1) 함수 $f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$이 공평한 함수가 되도록 $f(1)$부터 $f(n)$까지 값을 차례대로 정하자. $f(1)$의 값으로 가능한 것은 1부터 n까지 n가지 경우가 있다. $f(1)$의 값을 정한 후에, $f(2)$의 값은, 시행 후 R_2가 R_1과 겹치지 않

아야 하므로 $n-1$가지 경우가 있다. 같은 방법으로 $f(3)$의 값은, 시행 후 R_3가 R_1 또는 R_2와 겹치지 않아야 하므로, $n-2$가지 경우가 있고, $\cdots$, $f(n)$의 값은 시행 후 R_n이 $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$과 겹치지 않아야 하므로 1가지 경우가 있다. 따라서 곱의 법칙에 의하여 공평한 함수 f의 개수는 $n!$이다.

(3-2) (a) 함수 g로 시행을 하여 동전을 옮기면, 함수 f로 시행을 하여 동전을 옮긴 후 시계 방향으로 1만큼씩 더 옮긴 것과 같다. 동전은 모두 다른 꼭짓점 위로 옮겨지므로 g는 공평한 함수이다.

(3-2) (b) 치역이 $\{a,b\}$인 공평한 함수가 존재하면, (3-2) (a)에 의하여 치역이 $\{a-b+9, 9\}$인 공평한 함수가 존재한다. 이때, 치역의 두 원소의 차는 변화가 없으므로 $b=9$이고, $9-a \geq 5$, 즉, $a=1,2,3,4$인 경우만 고려하면 된다.
정9각형 위에 있는 9개의 동전 중 일부는 시계 방향으로 9만큼 옮기고, 나머지는 시계 방향으로 a만큼 옮긴다. 9만큼 옮기면 원래 있던 꼭짓점으로 돌아오므로, 움직이지 않는 것으로 간주할 수 있다. 시행을 할 때, 옮기지 않는 동전과 a만큼 옮기는 동전이 각각 적어도 하나씩 존재하므로, 정9각형 위에는 R은 옮기지 않고, R'은 시계 방향으로 a만큼 옮기는 시계 방향으로 연속하여 위치한 두 동전 R, R'이 존재한다.

정n각형을 적당히 회전하여 $R=R_9$, $R'=R_1$, 즉, $f(9)=9$, $f(1)=a$라고 가정할 수 있다. 이때 시행 후 동전 R_9는 P_9 위에 그대로 남아있고, R_1은 P_{1+a}로 이동한다. 시행 후 동전의 위치가 겹치지 않으므로 원래 P_{1+a} 위에 있던 동전 R_{1+a}는 이동해야 한다. 따라서 $f(1+a)=a$이고, R_{1+a}는 P_{1+2a}로 이동한다. 그러면 P_{1+2a} 위에 있던 동전 R_{1+2a}도 이동해야 하고, $f(1+2a)=a$이다. 이와 같은 방법으로 시행 후 동전의 위치를 보면 다음과 같다.
$a=1$인 경우, R_1은 P_2, R_2는 P_3, $\cdots$, R_8은 P_9로 이동한다.
$a=2$인 경우, R_1은 P_3로, R_3는 P_5로, R_5는 P_7로, R_7은 P_9로 이동한다.
$a=4$인 경우, R_1은 P_5로, R_5는 P_9로 이동한다.
위의 세 가지 경우에는 P_9 위에 적어도 두 개의 동전이 위치하게 되어 공평한 함수가 될 수 없다. 따라서, $a=1,2,4$인 공평한 함수는 존재하지 않는다.
$a=3$인 경우에는,

$$f(k)=\begin{cases} 3 & k=1,4,7 \\ 9 & k=2,3,5,6,8,9 \end{cases}$$

로 정의하면 공평한 함수가 된다. 이때 $b-a$의 값은 6이다.
따라서 5 이상의 자연수 중 $b-a$의 값으로 가능한 것은 6뿐이다.

(3-3) 귀류법으로 공평한 일대일대응이 존재하지 않음을 보이자.
공평한 일대일대응 f가 존재한다고 가정하자.
각각의 i에 대하여, 시행 후 동전 R_i의 위치를 P_k라 하면, $i+f(i)=k$이거나 $i+f(i)=n+k$이다. 즉, $i+f(i)-k$는 n의 배수이다. 따라서 모든 동전 R_i에 대하여 $(i+f(i)-k)$의 값을 모두 더하면 그 값은 n의 배수가 된다. 또한 공평한 함수의 정의에 의하여 시행 후에는 각각의 $1 \leq k \leq n$에 대하여 P_k에 정확히 하나의 동전이 놓인다. 따라서 모든 동전 R_i에 대하여 $(i+f(i)-k)$의 값을 더한 것은 $\sum_{i=1}^{n}(i+f(i))-\sum_{k=1}^{n}k$와 같고, f는 일대일 대응이므로 제시문(나)에 의하여

$$\sum_{i=1}^{n}(i+f(i))-\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{i=1}^{n}f(i)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이다. 그런데 n이 짝수이므로 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}\cdot n+\frac{n}{2}$은 n으로 나눈 나머지가 $\frac{n}{2}$으로 n의 배수가 될 수 없다. 이는 모순이다. 따라서 공평한 일대일대응은 존재하지 않는다.