문항 3 **(35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) [부분적분법] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$가 성립한다.

(나) $x_1 \neq x_2$일 때, 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$이다.

(3-1) 상수 a, b에 대하여 다음을 만족하는 이차함수 $g(x)$를 구하시오. [15점]

실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속이며 $f(a) = f(b) = 0$인 임의의 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

이다.

(3-2) **(3-1)**에서 구한 함수 $g(x)$와 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} + \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

가 성립함을 보이시오. [10점]

(3-3) $\dfrac{1}{2\sqrt{e}} + \dfrac{1}{2} \le \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \le \dfrac{1}{2\sqrt{e}} + \dfrac{67}{120}$임을 보이시오. [10점]

문항 ❶

1. 출제 의도

삼각형에 관련된 사인법칙, 코사인법칙 등 기본적인 성질들을 비롯하여 더 나아가 삼각함수의 미분에 관련된 내용을 숙지하고 있는지를 종합적으로 확인하는 문제이다. 각 문항의 (a)는 사인법칙, 코사인법칙을 상황에 맞게 적용할 수 있는지를 확인하는 문제이다. (1-1)(b)에서는 함수가 아닌 방정식으로부터 필요한 도함수를 음함수를 이용하여 구할 수 있는지를 확인하고자 했다. (1-2)(b)에서는 극한을 구할 때, 삼각함수의 극한을 활용할 수 있는지를 확인하고자 했다.

2. 문항 해설

- **(1-1)** (a) 코사인법칙을 사용하여 삼각형의 한 변을 이웃한 두 변과 그 대각에 관한 식으로 나타낼 수 있다.
- **(1-1)** (b) 코사인법칙을 이용하면 구하고자 하는 각을 포함하는 방정식을 구할 수 있다. 함수가 아닌 방정식의 경우, 음함수 미분을 활용하면 관련 도함수 및 미분계수를 구할 수 있다.
- **(1-2)** (a) 사인법칙은 삼각형의 각 변들을 그 대각의 사인함수 및 외접원의 반지름으로 나타낸다. 이를 활용하면 이웃한 두 변의 길이를 이용해 대각에 대한 사인값의 비를 알 수 있다.
- **(1-2)** (b) 문제 (1-2)(a)의 과정과 삼각함수의 극한을 이용하면, 주어진 문제를 기본적인 삼각함수의 극한 문제로 표현할 수 있다.

3. 채점기준

(1-1)(a)
- 코사인법칙을 적용하여 방정식을 구하면 3점
- 양수 조건 및 삼각함수의 범위를 이용하여 문제를 완전히 해결하면 2점

(1-1)(b)
- 코사인법칙을 이용하여 방정식을 구하면 2점
- 음함수를 이용하여 $f'(\theta)$를 s, $\dfrac{ds}{d\theta}$, $f(\theta)$로 표현하면 3점
- (1-1)(a)의 관계식을 미분하여 $\dfrac{ds}{d\theta}$를 구하면 2점
- 주어진 값들을 대입하여 $f'(\theta)$를 구하면 3점

(1-2)(a)
- 사인법칙을 이용하여 관계식을 구하면 3점
- 계산 실수 없이 답을 구하면 2점

(1-2)(b)
- 각 $\angle PSO$와 각 $\angle PTO$를 이용하여 $g(\theta)$를 표현하면 2점
- 사인함수의 극한을 이용하여 주어진 극한을 θ에 관한 구체적인 극한으로 나타내면 5점
- 사인함수의 극한을 이용하여 구하고자 하는 극한을 구하면 3점

4. 예시 답안

(1-1) (a) S의 좌표를 $(s,0)$이라 하자. 선분 PS의 길이는 피타고라스 정리에 의해서 $\sqrt{(\cos\theta - s)^2 + (\sin\theta)^2} = 4$이므로 이것을 s에 대해서 풀면 $s = \cos\theta \pm \sqrt{16-(\sin\theta)^2}$이 된다. S는 x축의 양의 방향 위의 점이고, $|\cos\theta|, |\sin\theta| \le 1$이므로 $s = \cos\theta + \sqrt{16-(\sin\theta)^2}$가 된다.

(b) 제시문 (나)를 삼각형 $\Delta\,OPS$에 적용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$s^2 = 1^2 + 4^2 - 8\cos f(\theta)$$

이를 제시문 (다)를 이용하여 θ에 대해서 미분하면

$$2s \cdot \frac{ds}{d\theta} = 8\sin f(\theta) \cdot f'(\theta)$$

를 얻을 수 있다. 이 때, (a)의 결과를 θ에 대해서 미분하면, $\frac{ds}{d\theta} = -\sin\theta - \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{16-(\sin\theta)^2}}$임을 알 수 있다.

$\theta = \frac{\pi}{2}$일 때, $\frac{ds}{d\theta} = -1$이고, $\sin f(\theta) = \frac{s}{4}$이므로, 두 식을 이용하면 $f'(\theta) = -1$을 얻을 수 있다.

(1-2) (a) 제시문 (가)를 삼각형 $\Delta\,PSO$에 이용하면, $\sin\theta_1 = \frac{\sin\theta}{4}$이므로 $\sin\theta_1 = \frac{1}{20}$임을 알 수 있다.

(b) 각 $\angle PSO$를 θ_1, 각 $\angle PTO$를 θ_2라 하자. 그러면 $g(\theta) = \theta_1 - \theta_2$이며, (1-2) (a)에서와 같은 방법으로 $\sin\theta_1 = \frac{\sin\theta}{4}$, $\sin\theta_2 = \frac{\sin\theta}{8}$임을 쉽게 알 수 있다. 그리고 $\lim\limits_{\theta\to\pi-} g(\theta) = \lim\limits_{\theta\to\pi-}\theta_1 = \lim\limits_{\theta\to\pi-}\theta_2 = 0$ 이므로 제시문 (라)에 의해서 $\lim\limits_{\theta\to\pi-}\frac{\sin\theta_1}{\theta_1} = \lim\limits_{\theta\to\pi-}\frac{\sin\theta_2}{\theta_2} = 1$이 된다.

따라서, 다음과 같이 구하고자 하는 극한을 구할 수 있다.

$$\lim_{\theta\to\pi-}\frac{g(\theta)}{\pi-\theta} = \lim_{\theta\to\pi-}\frac{\theta_1-\theta_2}{\pi-\theta} = \lim_{\theta\to\pi-}\left(\frac{\theta_1}{\pi-\theta} - \frac{\theta_2}{\pi-\theta}\right) = \lim_{\theta\to\pi-}\left(\frac{\sin\theta_1}{\pi-\theta}\cdot\frac{\theta_1}{\sin\theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{\pi-\theta}\cdot\frac{\theta_2}{\sin\theta_2}\right)$$
$$= \lim_{\theta\to\pi-}\frac{\sin\theta_1 - \sin\theta_2}{\pi-\theta} = \lim_{\theta\to\pi-}\frac{\sin\theta}{8(\pi-\theta)} = \frac{1}{8}$$

문항 ❷

1. 출제 의도

연속 함수의 개념을 잘 이해해서 주어진 상황에서 연속 함수가 구성될 조건을 정확히 찾아낼 수 있는지를 평가한다.

사잇값의 정리는 직관적으로 당연하게 생각되는 결론을 수학적으로 논증할 수 있게 해주는 도구인데, 이러한 도구를 이용해서 직관적으로 값만 얻지 않고 그 값이 되어야만 하는 상황을 엄밀하게 증명할 수 있는지 평가하는 것이 (2-1)의 출제 의도이다. (2-2)는 함수를 합성했을 때 정의역과 공역/치역이 어떻게 함수의 존재성이 영향을 주는지를 파악하는 문제이며, 제시문을 읽고 주어진 상황에 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(2-3)은 구간별로 주어진 함수를 잘 이어붙여서 전체집합에서 연속함수가 되도록 구성하는 문제이며 이는 교과서에서 좌극한/우극한을 이용해서 각 점에서 어떤 함수가 연속인지를 알아내는 예시들의 심화된 형태이다. 좌극한/우극한 뿐 아니라 (2-2)의 상황과 같이 함수 자체가 구간별로 존재하는 또는 존재하지 않는 상황이 되는 경우에 유의하면서 전체함수를 구성해야 해서, 앞의 두 소문항보다 난이도가 다소 높은 변별력을 목적으로 하는 문항이기도 하다.

2. 문항 해설

- **(2-1)** 사인함수가 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 ± 1이 되는 값을 유일하다는 사실로부터 , $f(2\pi)$, $f(3\pi)$의 값을 구할수 있고 이로부터 사잇값의 정리를 써서 $f(\frac{5\pi}{2})$의 값을 구하고 이를 엄밀하게 증명할 수 있다.
- **(2-2)** $h(x)$ 는 구간을 잘 나누면 각각의 구간에서 일차함수이므로 그래프를 어렵지 않게 그릴 수 있다. 이 그래프의 개형과 사인함수의 공역의 범위를 고려하여 $b-a$가 최대가 되는 $f(x)$의 정의역 $[a,b]$ 를 구할 수 있다. 이것은 어렵지 않게 직관적으로 구할 수 있지만 이를 수학적으로 논증하기 위해서는 제시문 (가)의 이해가 필요하다.
- **(2-3)** 각각의 구간에서 연속함수가 존재할 조건을 소문항 (2-2)를 풀면서 파악할 수 있었을 것이다. 이러한 조건과 몇 개의 구간에서 구성된 함수를 이어 붙여서 전체 정의역에서 연속함수를 구성하기 위해서는 각각의 구간이 겹치는 점 a_2, a_3 에서의 함수의 좌극한과 우극한이 같도록 해야한다. 이 두 조건을 파악해서 문제의 조건이 만족되는 값을 구할 수 있다.

3. 채점기준

(2-1)
- 사인 함수의 값의 범위와 함수 $f(x)$의 공역에 대한 조건을 이용하여 $f(2\pi) = \frac{\pi}{2}$, $f(3\pi) = \frac{3\pi}{2}$임을 파악하면 5점
- 사잇값의 정리를 적용하여 $f(\frac{5\pi}{2})$의 값을 구하면 5점

(2-2)
- 함수 $h(x)$의 그래프를 정확히 그리면 4점
- 함수 $h(x)$의 그래프로부터 $[a,b]$에 대한 조건을 파악하면 3점
- $b-a$가 최대가 되는 a,b의 값을 구하면 3점

(2-3)
- $a_n \le x \le a_{n+1}$ 일 때 부등식 $-1 \le \cos nx + 1 \le 1$ 이 성립함을 파악하면 4점
- $n = 1, 2$일 때 $\cos na_{n+1} + 1 = \cos(n+1)a_{n+1} + 1$ 이어야 함을 파악하면 4점
- 위 두 조건으로부터 a_2, a_3의 값과 a_4의 최댓값을 구하면 7점

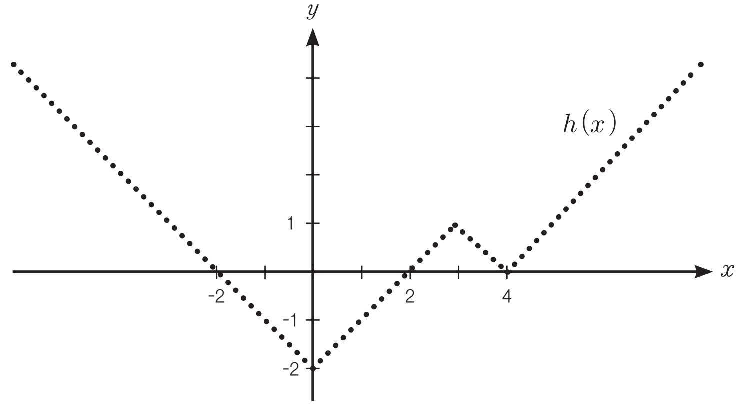
4. 예시 답안

(2-1) 등식 $\sin f(x) = \cos x$에 $x = 2\pi$와 $x = 3\pi$를 대입하면 $f(2\pi) = \frac{\pi}{2}$, $f(3\pi) = \frac{3\pi}{2}$ 임을 알 수 있다.

사잇값의 정리에 의해 $f(c) = \pi$ 인 c $(2\pi < c < 3\pi)$가 존재하고 이 때

$\cos c = \sin f(c) = 0$ 이어야 하므로, c 의 값은 $\frac{5\pi}{2}$이어야 한다. 따라서 $f(\frac{5\pi}{2}) = \pi$이다.

(2-2) 함수 $h(x) = |x| - |x-3| + |x-4| - 3$ 의 그래프는 다음과 같다.



$\sin f(x) = h(x)$인 연속함수 $f(x)$가 존재하려면 $h(x)$의 치역이 사인함수의 치역인 $[-1,1]$ 에 포함되어야 하므로,

$h(x)$의 정의역 $[a,b]$ 는 구간 $[-3,-1]$ 에 포함되거나 또는 $[1,5]$ 에 포함되어야 한다.

사인함수 $g(x) = \sin x$ 는 구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 에서 일대일인 연속함수이고 $g(x)$의 치역 $[-1,1]$ 은 $[-3,-1]$ 또는

$[1,5]$ 에서 정의된 연속함수 $h(x)$의 치역을 포함하므로, 제시문 (가)에 의하여 $g(f(x)) = h(x)$ 이고

구간 $[-3,-1]$ 과 $[1,5]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$가 각각 존재한다.

$b-a$가 최대이려면 $a=1$, $b=5$이고, 이때 $b-a=4$이다.

(2-3) 조건을 만족하는 연속함수 $f(x)$가 존재하려면,

(A) $a_n \le x \le a_{n+1}$ 일 때 부등식 $-1 \le \cos nx + 1 \le 1$ 이 성립해야 하고

(B) $n = 1, 2$일 때 $\cos n a_{n+1} + 1 = \cos (n+1) a_{n+1} + 1$ 이어야 한다.

이 조건들을 다시 정리해 보면

(A) $a_n \le x \le a_{n+1}$ $(n = 1,2,3)$ 일 때 $\cos nx \le 0$ 이고

$\cos n a_{n+1} = \cos (n+1) a_{n+1}$ $(n = 1, 2)$이 성립하려면

$(n+1) a_{n+1} = \pm n a_{n+1} + 2k\pi$ 이어야 한다. 따라서

(B) $a_{n+1} = 2k\pi$ 또는 $a_{n+1} = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$ 이다 (단, k는 정수).

(A)에 의하여 $\dfrac{\pi}{2} \le x \le a_2$ 일 때, 부등식 $\cos x \le 0$가 성립해야 하므로, $a_2 \le \dfrac{3\pi}{2}$이다.

따라서 (B)에 의하여 $a_2 = \dfrac{2\pi}{3}$ 또는 $\dfrac{4\pi}{3}$ 이다.

$a_2 = \dfrac{2\pi}{3}$인 경우 $\dfrac{2\pi}{3} \le x \le a_3$일 때 부등식 $\cos 2x \le 0$이 성립해야 하므로 $a_3 \le \dfrac{3\pi}{4}$이다.

(B)에 의하여 $a_3 = \dfrac{2k\pi}{5}$(k는 정수)이어야 하는데, 이런 꼴의 값 중에 $\dfrac{2\pi}{3}$와 $\dfrac{3\pi}{4}$ 사이의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $a_2 = \dfrac{2\pi}{3}$일 수 없다.

$a_2 = \dfrac{4\pi}{3}$인 경우 $\dfrac{4\pi}{3} \le x \le a_3$일 때 부등식 $\cos 2x \le 0$이 성립해야 하므로 $a_3 \le \dfrac{7\pi}{4}$이다.

$a_3 = \dfrac{2k\pi}{5}$(k는 정수) 꼴의 값 중에서 $\dfrac{4\pi}{3}$와 $\dfrac{7\pi}{4}$ 사이의 값은 $a_3 = \dfrac{8\pi}{5}$가 유일하다.

$\dfrac{8\pi}{5} \le x \le a_4$일 때 부등식 $\cos 3x \le 0$이 성립하는 가장 큰 a_4의 값은 $\dfrac{11\pi}{6}$이다.

따라서 $a_2 = \dfrac{4\pi}{3}$, $a_3 = \dfrac{8\pi}{5}$이고, a_4의 최댓값은 $\dfrac{11\pi}{6}$이다.

문항 ❸ (의예과 외)

1. 출제 의도

부분적분법을 이용하여 주어진 함수에 관한 적분을 이계도함수에 관한 적분으로 표현할 수 있는지를 알아본다. 또한 이 결과를 이용하여 특정한 함수의 적분의 근삿값을 구할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

- **(3-1)**은 부분적분법을 적용하여 주어진 적분을 변형할 수 있는지를 평가한다.
- **(3-2)**는 주어진 함수를 적절하게 변형하여 부분적분법을 적용할 수 있는지를 평가한다.
- **(3-3)**은 **(3-2)**에서 얻어진 결과를 이용하여 주어진 함수가 만족하는 부등식을 이끌어낼 수 있는지 알아본다.

3. 채점기준

(3-1) $g(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$ 임을 보임. 5점

$g(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$일 때, 부분적분법을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보임. 10점

(3-2) $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$ 가 $h(a) = h(b) = 0$, $h''(x) = f''(x)$임을 보임. 5점

(3-1)의 결과를 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보임. 5점

(3-3) $0 \le \displaystyle\int_0^1 g(x) f''(x)\,dx \le \dfrac{7}{120}$임을 보임. 6점

(3-2)의 결과를 이용하여 주어진 부등식을 보임. 4점

4. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)에 의하여

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{2x-a-b}{2}f(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{2x-a-b}{2}f'(x)dx = -\int_a^b \frac{2x-a-b}{2}f'(x)dx$$

이고,

$$\int_a^b \frac{2x-a-b}{2}f'(x)dx = \left[\frac{x^2-(a+b)x+ab}{2}f'(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^2-(a+b)x+ab}{2}f''(x)dx$$
$$= -\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(x)dx$$

이다. 따라서 $g(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$에 대하여 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)f''(x)dx$ 이다.

(3-2) $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$로 두면

$$h(a) = h(b) = 0, \quad h''(x) = f''(x)$$

이다. (3-1)의 결과를 이용하면

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(x)dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2}h''(x)dx$$
$$= \int_a^b h(x)dx$$
$$= \int_a^b \left\{f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)\right\}dx$$
$$= \int_a^b f(x)dx - \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2}$$

이다. 따라서

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} + \int_a^b g(x)f''(x)dx$가 성립한다.

(3-3) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$이면 $f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$이다. (3-2)의 결과를 이용하면

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1+e^{-\frac{1}{2}}}{2} + \int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

이다. 또한 $\displaystyle 0 \le \int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \le \int_0^1 \frac{x(x-1)(x^2-1)}{2}dx = \frac{7}{120}$

이므로 $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{2} \le \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \le \frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{67}{120}$이다.

2021학년도 논술고사 기출문제(자연) : 오전-의예과 외

문항 1 **(30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) 계수가 실수인 삼차다항식 x^3+ax^2+bx+c가 실수 α, β, γ에 대해 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 인수분해되는 경우, 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$은 세 실근 α, β, γ를 갖는다고 한다.
(단, α, β, γ의 값이 서로 다를 필요는 없다.)

(나) 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$이 세 실근 α, β, γ를 가지면, 등식

$$x^3+ax^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$= x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

이 성립하므로 근과 계수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\alpha+\beta+\gamma = -a, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b, \quad \alpha\beta\gamma = -c$$

(1-1) 삼차방정식 $x^3-x-t=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 t의 값의 범위를 구하시오. (8점)

(1-2) 삼차방정식 $x^3-x-t=0$이 세 실근 α, β, γ $(\alpha \le \beta \le \gamma)$를 갖는다.

(a) 실근 β의 값의 범위를 구하시오. (5점)

(b) 곡선 $y=x^3-x-t$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 β로 나타내고, S의 최솟값을 구하시오. (17점)

문항 2 **(35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = f(x)$가 성립한다.

(나) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(다) $\sin^2 x$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \ (C\text{는 적분상수})$$

(※) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는 $\displaystyle\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt = x\sin^2 x$를 만족한다.