# 2022학년도 논술 모의고사 문제(자연 : 의예과 외)

**문항 1** **(30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) [사인법칙] 삼각형 $ABC$에서 외접원의 반지름의 길이를 $R$라고 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

이다.

(나) [코사인법칙] 삼각형 $ABC$에서

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

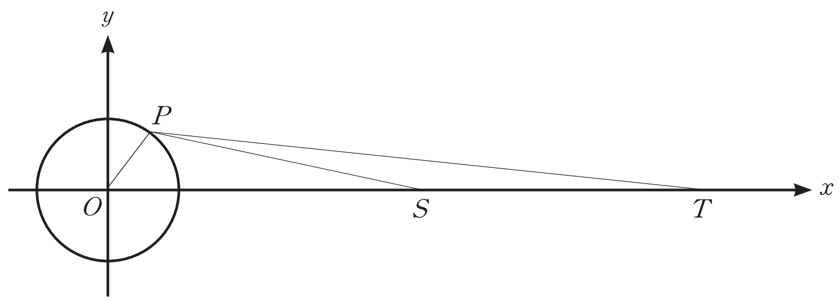
이다.

(다) [음함수의 미분법] 음함수 표현 $f(x,y)=0$에서 $y$를 $x$의 함수로 보고 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

(라) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$(단, $x$의 단위는 라디안)

(※) 단위원 위의 한 점을 $P(\cos\theta, \sin\theta)$라 하자. 여기서 $\theta$는 $0\le\theta\le\pi$를 만족한다.

점 $P$로부터 거리가 4와 8인 $x$축의 양의 방향 위의 점들을 각각 $S$와 $T$라 하자.




**(1-1)** (a) 점 $S$의 $x$좌표를 변수 $\theta$에 관한 식으로 나타내시오. [5점]

(b) 원점을 $O$라 하자. 각 $\angle OPS$의 크기를 $f(\theta)$라 할 때, $f'(\pi/2)$의 값을 구하시오. [10점]

**(1-2)** (a) 각 $\angle PSO$를 $\theta_1$라 하자. $\sin\theta=\frac{1}{5}$ 일 때, $\sin\theta_1$의 값을 구하시오. [5점]

(b) 각 $\angle SPT$의 크기를 $g(\theta)$라 할 때, 극한값 $\lim_{\theta\to\pi}\frac{g(\theta)}{\pi-\theta}$를 구하시오. [10점]



**문항 2** **(35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) 구간 $[a,b]$에서 일대일인 연속함수 $g(x)$와 구간 $[c,d]$에서 정의된 연속함수 $h(x)$에 대하여, $h(x)$의 치역이 함수 $g(x)$의 치역의 부분집합이라고 하자. 이때, 구간 $[c,d]$에 속하는 모든 실수 $\alpha$에 대하여 $f(\alpha)$를 $g(\beta)=h(\alpha)$가 성립하는 수 $\beta(a<\beta<b)$로 정의하면, $f(x)$는 구간 $[c,d]$에서 정의된 함수이다.

구간 $[c,d]$의 임의의 실수 $\alpha$에 대하여, 함수 $f(x)$의 정의를 따르면 $g(f(\alpha))=h(\alpha)$이고 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)$는 연속함수이므로,

$$g\left(\lim_{x\to\alpha}f(x)\right)=\lim_{x\to\alpha}g(f(x))=\lim_{x\to\alpha}h(x)=h(\alpha)$$

이고 $g(x)$가 일대일함수라는 사실로부터 $\lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$를 얻는다.

따라서 $f(x)$는 구간 $[c,d]$에서 연속이고 $(g\circ f)(x)=h(x)$이다.

(나) [사잇값의 정리] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\ne f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 $k$에 대하여 $f(c)=k$인 $c$가 열린구간 $(a,b)$에 적어도 하나 존재한다.

**(2-1)** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $0\le f(x)\le 2\pi$이고 $\sin f(x)=\cos x$를 만족할 때, $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오. [10점]

**(2-2)** 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\sin f(x)=|x|-|x-3|+|x-4|-3$을 만족할 때, $b-a$의 최댓값을 구하시오. [10점]

**(2-3)** 실수 $a_1, a_2, a_3, a_4$가 다음 조건을 만족한다.

> (i) $a_n<a_{n+1}$ $(n=1,2,3)$
>
> (ii) $a_n\le x\le a_{n+1}$인 실수 $x$에 대하여 $\sin f(x)=\cos(nx)+1$ $(n=1,2,3)$이고, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 존재한다.

$a_1=\frac{\pi}{2}$일 때, $a_2, a_3$의 값을 구하고 $a_4$의 최댓값을 구하시오. [15점]

**문항 3** **(35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) [부분적분법] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$가 성립한다.

(나) $x_1 \neq x_2$일 때, 두 점 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$이다.

**(3-1)** 상수 $a$, $b$에 대하여 다음을 만족하는 이차함수 $g(x)$를 구하시오. [15점]

실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속이며 $f(a) = f(b) = 0$인 임의의 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

이다.

**(3-2)** **(3-1)**에서 구한 함수 $g(x)$와 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 $f''(x)$가 연속인

함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} + \int_a^b g(x)f''(x)dx$$

가 성립함을 보이시오. [10점]

**(3-3)** $\dfrac{1}{2\sqrt{e}} + \dfrac{1}{2} \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leq \dfrac{1}{2\sqrt{e}} + \dfrac{67}{120}$임을 보이시오. [10점]







# 문항 ❶

## 1. 출제 의도

삼각형에 관련된 사인법칙, 코사인법칙 등 기본적인 성질들을 비롯하여 더 나아가 삼각함수의 미분에 관련된 내용을 숙지하고 있는지를 종합적으로 확인하는 문제이다. 각 문항의 (a)는 사인법칙, 코사인법칙을 상황에 맞게 적용할 수 있는지를 확인하는 문제이다. (1-1)(b)에서는 함수가 아닌 방정식으로부터 필요한 도함수를 음함수를 이용하여 구할 수 있는지를 확인하고자 했다. (1-2)(b)에서는 극한을 구할 때, 삼각함수의 극한을 활용할 수 있는지를 확인하고자 했다.

## 2. 문항 해설

- **(1-1)** (a) 코사인법칙을 사용하여 삼각형의 한 변을 이웃한 두 변과 그 대각에 관한 식으로 나타낼 수 있다.
- **(1-1)** (b) 코사인법칙을 이용하면 구하고자 하는 각을 포함하는 방정식을 구할 수 있다. 함수가 아닌 방정식의 경우, 음함수 미분을 활용하면 관련 도함수 및 미분계수를 구할 수 있다.
- **(1-2)** (a) 사인법칙은 삼각형의 각 변들을 그 대각의 사인함수 및 외접원의 반지름으로 나타낸다. 이를 활용하면 이웃한 두 변의 길이를 이용해 대각에 대한 사인값의 비를 알 수 있다.
- **(1-2)** (b) 문제 (1-2)(a)의 과정과 삼각함수의 극한을 이용하면, 주어진 문제를 기본적인 삼각함수의 극한 문제로 표현할 수 있다.

## 3. 채점기준

**(1-1)(a)**
- 코사인법칙을 적용하여 방정식을 구하면 3점
- 양수 조건 및 삼각함수의 범위를 이용하여 문제를 완전히 해결하면 2점

**(1-1)(b)**
- 코사인법칙을 이용하여 방정식을 구하면 2점
- 음함수를 이용하여 $f'(\theta)$를 $s$, $\dfrac{ds}{d\theta}$, $f(\theta)$로 표현하면 3점
- (1-1)(a)의 관계식을 미분하여 $\dfrac{ds}{d\theta}$를 구하면 2점
- 주어진 값들을 대입하여 $f'(\theta)$를 구하면 3점

**(1-2)(a)**
- 사인법칙을 이용하여 관계식을 구하면 3점
- 계산 실수 없이 답을 구하면 2점

**(1-2)(b)**
- 각 $\angle PSO$와 각 $\angle PTO$를 이용하여 $g(\theta)$를 표현하면 2점
- 사인함수의 극한을 이용하여 주어진 극한을 $\theta$에 관한 구체적인 극한으로 나타내면 5점
- 사인함수의 극한을 이용하여 구하고자 하는 극한을 구하면 3점