2022학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 ■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학	
	핵심개념 및 용어	명제, 귀류법, 부등식	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

문제에서 주어진 명제를 잘 이해하고 그것을 논리적으로 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 또한 부등식 조작 능력과 그 결과로 얻어진 새로운 부등식을 문제에 맞게 잘 해석하고 활용할 수 있는지를 평가한다. 이 문제를 해결하기 위해서는 복잡한 계산을 할 필요는 없고 귀류법을 활용할 수 있는 기본적인 논리력과 간단한 수식 조작을 할 수 있는 능력만 있으면 된다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(가)	성취기준 1	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
	(나)	성취기준 2	[10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	권오남 등	교학사	2017년	197	(가)	
수학	홍성복 등	지학사	2017년	205	(가)	
수학	권오남 등	교학사	2017년	199	(나)	재구성
수학	홍성복 등	지학사	2017년	206	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외						
자료명(도서명)	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(1-1) 귀류법을 써서 S에 30 이상인 원소가 2개 있다면 모순임을 보일 수 있다. 간단한 절대부등식 조작을 통하여 증명한다. 비교적 작은 자연수 x, y가 주어진 부등식 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<\frac{1}{30}$ $(x>y)$을 만족하고, 큰 두 자연수 x, y는 이 부등식을 만족하지 않는다는 것은 관찰하는 것은 쉽다.

(1-2) $1 \leq i \leq 6$일 때, $\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i} \geq \frac{1}{30}$이 됨을 보임으로써 1~6까지 S에 속함을 보이면 된다.

(1-3) 이미 구한 a_i로부터 부등식 $a_{i+1} \geq \frac{30\,a_i}{30-a_i}$를 만족하는 최소의 a_{i+1}을 귀납적으로 구해 나가면 된다. 1부터 6까지는 (1-2)에서 구했으므로 a_7부터 a_{10}을 차례로 구하면 된다. 이렇게 구한 10개의 자연수가 최대임을 보일 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	귀류법으로써 S에 30 이상의 원소가 2개 이상 있다면 모순임을 보인다.	7점
(1-2)	1부터 6까지 S에 속함을 보인다.	8점
(1-3)	a_i로부터 부등식 $a_{i+1} \ge \dfrac{30a_i}{30-a_i}$를 만족하는 최소의 a_{i+1}을 구하고자 한다.	4점
	a_7부터 a_{10}을 모두 구한다.	8점
	10이 최대임을 보인다.	3점

7. 예시 답안

(1-1) S에 $n > m \ge 30$인 원소가 있다고 가정하자. 그러면 $\dfrac{1}{m} \le \dfrac{1}{30}$이므로

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{30} - \frac{1}{n} < \frac{1}{30}$$

이고 모순이다. 따라서 2개 이상 있을 수는 없다. $S = \{1,30\}$은 문제의 조건을 만족하므로 집합 S에는 30보다 큰 원소가 최대 1개까지 있을 수 있다.

(1-2) $2 \le i \le 6$에 대하여, $\dfrac{1}{i-1} - \dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i(i-1)} \ge \dfrac{1}{30}$이므로 6까지 가능하다. 따라서, $k = 6$이다.

(1-3) $a_i = i,\ 1 \le i \le 6$이라 하자.

$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{1}{30} \Leftrightarrow y \ge \dfrac{30x}{30-x}$이므로 a_7을 $a_7 \ge \dfrac{30a_6}{30-a_6}$을 만족하는 가장 작은 자연수로 잡는다.

$a_7 \ge \dfrac{30 \cdot 6}{30-6} = \dfrac{180}{24} > 7$ 이므로 $a_7 = 8$. 마찬가지로,

$a_8 \ge \dfrac{30 \cdot 8}{30-8} = \dfrac{240}{22} > 10$ 이므로 $a_8 = 11$

이와 같이 하여 $a_9 = 18,\ a_{10} = 45$라 하면 $S = \{a_1,\ a_2, \cdots, a_{10}\}$는 주어진 조건을 만족한다. (1-1)에 의해 30 이상의 수는 한 개뿐이어야 하므로 S의 원소의 개수의 최댓값은 10개이다.

이렇게 구한 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$이 최대 개수인 이유는 다음과 같다. 만일 또 다른 $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$ $(m \ge 11)$이 주어진 조건을 만족한다면, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$은 조건 $a_i \ge \dfrac{30a_{i-1}}{30-a_{i-1}}$을 만족하는 가장 작은 자연수들을 차례로 고른 것이기 때문에 모든 $1 \le i \le 10$에 대하여 $a_i \le b_i$이다. 그러므로 $b_{10} \ge a_{10} > 30$이 되는데 이는 (1-1)에 모순이 된다.

[별해] 집합 S의 원소 중 6 이상 30 미만인 것을 $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$라고 하면

$$\frac{k-1}{30} \le \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{c_{k-1}} - \frac{1}{c_k}\right) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_k} < \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{4}{30}$$

그러므로 $k \le 4$이어야 한다. (1-1)에 의해 S의 원소의 개수는 $5+4+1 = 10$ 이하이다.
$S = \{1,2,3,4,5,6,8,11,18,45\}$는 문제의 조건을 만족하므로 최댓값은 10이다.

2022학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 □ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분학	
	핵심개념 및 용어	수열의 극한, 정적분의 성질, 부분적분법	
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

이 문제는 수열의 성질을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는지와 정적분의 의미와 부분적분법을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정“** □ 수학 □ 수학Ⅰ □수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계

관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분학)
(가)	성취기준 1	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
(나)	성취기준 2	[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
(다)	성취기준 3	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

(관련 성취기준)

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분학	류희찬 외	천재교과서	2020	18-22	(가)	
미적분학	이준열 외	천재교육	2020	17-20	(가)	
미적분학	류희찬 외	천재교과서	2020	177-180	(나)	재구성
미적분학	이준열 외	천재교육	2020	164-166	(나)	재구성
미적분학	류희찬 외	천재교과서	2020	172-175	(다)	
미적분학	이준열 외	천재교육	2020	155-158	(다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외						
자료명(도서명)	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(2-1), (2-2) 정적분으로 주어진 수열의 범위를 구하고, 이를 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있다.

(2-3) 부분적분법을 이용하여 두 수열 사이의 관계를 구하고, (2-1), (2-2)의 결과를 이용하여 조건을 만족하는 다항식을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	$\frac{2}{(n+1)\pi} \le a_n \le \frac{2}{n\pi}$임을 보임.	5점
	$\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{2}{\pi}$임을 보임.	5점
(2-2)	$0 < b_{2k} < \frac{1}{(2k)^2\pi^2} - \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}$ 임을 보임.	5점
	$0 < \lvert b_n \rvert < \frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}$ 임을 보임.	3점
	$\lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$임을 보임.	2점
(2-3)	$a_n = \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{n\pi} + (-1)^{n+1} b_n$ 임을 보임.	10점
	$\lim_{n\to\infty} \left\{ n(n+1)a_n - \frac{2n+1}{\pi} \right\} = 0$임을 보임.	5점

7. 예시 답안

(2-1) $n\pi \le x \le (n+1)\pi$일 때, $\frac{1}{(n+1)\pi} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n\pi}$이고 $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \lvert \sin x \rvert dx = 2$이므로 제시문 (나)에 의해서 $\frac{2}{(n+1)\pi} \le a_n \le \frac{2}{n\pi}$이다. 그러므로 $\frac{2n}{(n+1)\pi} \le na_n \le \frac{2}{\pi}$이고 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi}$이므로 제시문 (가)에 의해 $\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{2}{\pi}$이다.

(2-2) 자연수 k에 대하여 $2k\pi \le x \le \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$일 때 $\frac{1}{\left(2k\pi + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{4k^2\pi^2}$ 이고

$\int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi} \cos x dx = 1$이므로 제시문 (나)에 의해서

$$\frac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \le \int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx \le \frac{1}{4k^2\pi^2} \qquad \text{(A)}$$

이다. 마찬가지로 $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \le x \le (2k+1)\pi$일 때 $\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{\left(2k\pi + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$ 이고

$\int_{(2k+1/2)\pi}^{(2k+1)\pi} \cos x dx = -1$이므로 제시문 (나)에 의해서

$$-\frac{1}{\left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \le \int_{(2k+1/2)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx \le -\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} \qquad \text{(B)}$$

이다. $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1/2)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx + \int_{(2k+1/2)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx$이므로 (A), (B)에 의하여

$0 < b_{2k} < \frac{1}{(2k)^2\pi^2} - \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}$ 이다. 마찬가지로 $\frac{1}{(2k+2)^2\pi^2} - \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2} < b_{2k+1} < 0$이므로

$0 < |b_n| < \frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}$ 이다. $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{(n+1)^2\pi^2}\right) = 0$이므로 제시문 (가)에 의해서 $\lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$이다.

(2-3) $$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= (-1)^n \left\{ \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - b_n \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{n\pi} + (-1)^{n+1} b_n \end{aligned}$$

이므로 (2-2)의 결과에 의해 $\lim_{n\to\infty} \left\{ n(n+1)a_n - \frac{2n+1}{\pi} \right\} = 0$이다. 따라서 $f(x) = \frac{2x+1}{\pi}$ 이다.

2022학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설

[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ	
	핵심개념 및 용어	함수의 그래프, 평행이동, 접선의 방정식	
예상 소요 시간	50분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

문제지와 동일

3. 출제 의도

좌표평면에서 평행이동을 활용해서 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 미적분에서 기본적인 개념인 접선의 방정식을 구하고 이와 관련한 계산을 할 수 있는지, 삼차함수의 그래프의 개형을 알고 있는지 그리고 이러한 개념들을 조합해서 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"**		
	■ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(가), (나)	성취기준 1	[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다.
	(가), (나)	성취기준 2	[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅱ)
		성취기준 1	[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
		성취기준 2	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 I	이준열 외	천재교육	2020	146-153	(가), (나)	재구성
수학 I	배종숙 외	금성출판사	2020	163-160	(가), (나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외						
자료명(도서명)	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(3-1) 함수의 그래프를 평행이동한 곡선의 식을 계산할 수 있는지 확인하는 간단한 계산문제이다.
(3-2) 삼차함수의 그래프의 개형을 이해하고 있다면 미분을 이용한 접선의 방정식을 계산하여 답을 구할 수 있는 문제이다.
(3-3) 이 문제를 해결하기 위해서는 수학명제로 구성된 문제의 조건을 읽고 이해할 수 있어야 한다. 이 문제는 최고차항의 계수가 1인 함수에 대한 일반식을 이용한 계산만으로는 해결하기가 어렵고, 조건을 이해한 후 (3-2)에서 계산한 결과와 좌표평면에서 함수의 그래프의 평행이동을 개념적으로 활용하여 해결할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	제시문 (가)의 식을 이용해서 a의 값을 구하면	5점
(3-2)	삼차함수의 그래프의 개형을 이용해서 조건에 맞도록 방정식을 세팅하면	5점
	이로부터 m, n의 값을 구하면	5점
(3-3) (a)	문제의 조건을 파악하고 상황에 맞는 식을 설정하면	5점
	이로부터 k의 값을 구하면	5점
(3-3) (b)	평행이동을 이용하여 여러 가지 순서쌍을 만들어내는 방법을 만들어낼 수 있으면	6점
	S의 원소의 개수를 정확히 세면	4점

7. 예시 답안

(3-1) $x^3-6x^2+9x+1 = (x-2)^3-3(x-2)+3$이므로 제시문 (가)에 의하여 $y=x^3-6x^2+9x+1$의 그래프는 $y=x^3-3x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $a=3$이다.

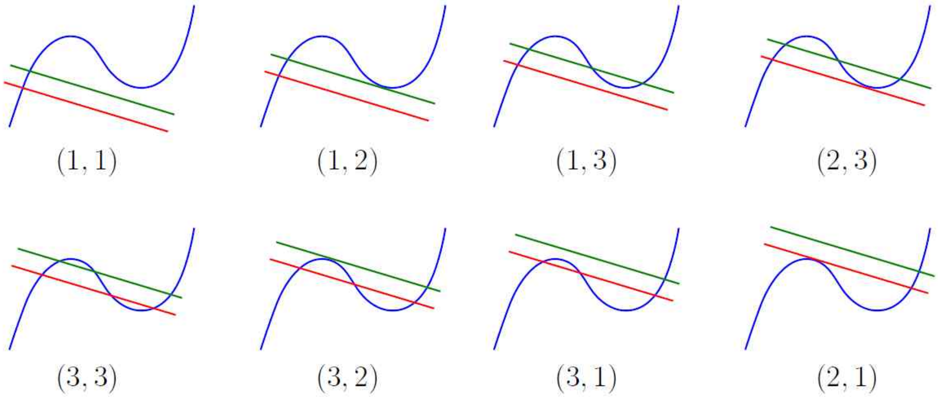
[별해] $(x-p)^3-a(x-p)+q=x^3-3px^2+(3p^2-a)x+(-p^3+ap+q)=x^3-6x^2+9x+1$인 p,q가 존재한다.
이때 $-3p=-6$에서 $p=2$이고 $3p^2-a=12-a=9$이므로 $a=3$이다.

(3-2) $f(x)=x^3-mx+n$라고 하면 $f'(x)=3x^2-m$이다. 따라서 $y=f(x)$의 기울기가 -1인 접선의 접점의 x좌표는, $\alpha=\sqrt{\frac{m-1}{3}}$라고 하면, $\pm\alpha$이다. 삼차함수의 그래프의 개형으로부터 접선 $y=-x$의 접점의 x좌표가 접선 $y=-x+4$의 x좌표보다 크므로, 두 접선의 접점의 좌표는 각각 $(\alpha,-\alpha),(-\alpha,\alpha+4)$이다.
따라서 $f(\alpha)=\alpha^3-(3\alpha^2+1)\alpha+n=-\alpha$, $f(-\alpha)=-\alpha^3+(3\alpha^2+1)\alpha+n=\alpha+4$이고 두 식으로부터 $n=2$, $\alpha=1$을 얻는다. 이때 $m=3\alpha^2+1=4$이다.
[별해] $f(x)=(x^3-mx+n)-(-x)=x^3-(m-1)x+n$은 $f'(x)=3x^2-(m-1)$의 두 실근을 $\pm\alpha$ ($\alpha=\sqrt{\frac{m-1}{3}}$)이라고 하면 $x=-\alpha$에서 극댓값 4를 $x=\alpha$에서 극솟값 0을 갖는다.
$m=3\alpha^2+1$이므로 $f(\alpha)=-2\alpha^3+n=0, f(-\alpha)=2\alpha^3+n=4$이다. 따라서 $n=2, \alpha=1$이고 $m=4$이다.

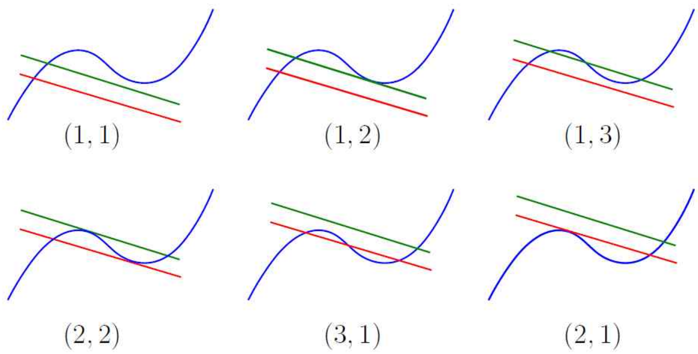
(3-3)
(a) (3-2)로부터 l_1, l_2를 접선으로 갖는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수의 그래프는 곡선 $y=x^3-4x$을 적당히 평행이동한 것이다. $(2,2,2,2)\in S$이려면 이 삼차함수의 그래프를 $y=-x$방향으로 적당히 평행이동하였을 때 두 직선 l_3, l_4가 접선이어야 한다.
$y=x^3-4x$이면 $y'=3x^2-4$이므로 곡선 $y=x^3-4x$의 기울기가 2인 접선의 접점의 x좌표는 방정식 $3x^2-4=2$의 두 근 $\pm\sqrt{2}$이다. 따라서 $y=x^3-4x$의 기울기가 2인 두 접선의 방정식은 각각 $y=2(x-\sqrt{2})-2\sqrt{2}=2x-4\sqrt{2}$과 $y=2x+4\sqrt{2}$이다. 이 두 접선의 y절편의 차이는 $8\sqrt{2}$이다. 삼차함수

$y=x^3-4x$을 적당히 평행이동해서 이 두 접선이 각각 l_3, l_4가 되어도 y절편의 차이는 변하지 않으므로 $k=8\sqrt{2}$이어야 한다.

(b) $f(x)=x^3-ax$ $(a>4)$라고 하면, 곡선 $y=f(x)$의 기울기가 -1인 두 접선의 y절편의 차이는 (3-2)의 계산 과정으로부터 $(-\alpha+f(-\alpha))-(\alpha+f(\alpha))=-2(\alpha+\alpha^3-(3\alpha^2+1)\alpha)=4\alpha^3$ (단, $\alpha=\sqrt{\frac{a-1}{3}}$)이므로 4보다 크고, 마찬가지로 기울기가 2인 두 접선의 y절편의 차이는 $8\sqrt{2}$보다 크다. 따라서 두 순서쌍 (a_1,a_2)와 (a_3,a_4)가 모두 $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$에 속하면 곡선 $y=f(x)$를 적당히 평행이동해서 얻어지는 곡선과 직선 l_i $(i=1,2,3,4)$의 교점의 개수가 a_i이다. 따라서 이 경우 $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in S$이다.



한편 두 순서쌍 (a_1,a_2)와 (a_3,a_4) 중 하나가 $(2,2)$이면 문제의 조건을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 (a)에 의하여 $y=x^3-4x$의 그래프를 적당히 평행이동한 것이다. 따라서 이 경우 다른 순서쌍이 집합 $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$의 원소일 때에만 $(a_1,a_2,a_3,a_4)\in S$이다.



따라서 S의 원소의 개수는 $8^2+6\times 2-1=75$이다.
(참고로 $f(x)=x^3-ax$ $(a<4)$를 평행이동하더라도 (a_1,a_2) 또는 (a_3,a_4)가 $(2,2)$가 되는 일은 없으므로 새로운 S의 원소는 얻어지지 않는다.)

2022학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설
[자연]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 □ 1번 □ 2번 ■ 의예-3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	집합, 귀류법, 수열	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

문제지와 동일

3. 출제 의도

주어진 질문의 상황을 잘 이해하고 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가한다. 수학 명제를 간단한 상황에 적용시켜 이해할 수 있고 이를 일반적인 상황으로 확장하는 능력과 귀류법을 이용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ■ 수학 □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(가)	성취기준 1	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
	(나)	성취기준 2	[10수학03-05] 명제의 역과 대우를 이해한다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	황선욱 외	미래N	2020	201	(가)	
수학	박교식 외	동아출판	2020	196	(가)	
수학	배종숙 외	금성출판사	2020	205	(가)	
수학	고성은 외	신사고	2020	191	(나)	재구성
수학	박교식 외	동아출판	2020	191	(나)	재구성
수학	김원경 외	비상교육	2020	185	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우

교과서 외						
자료명(도서명)	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

관련 교과서 근거						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부

5. 문항 해설

(3-1) k가 작은 경우 $\{1,2,\cdots,k\}$에 포함되는 흩어진 집합을 찾아보면 $a_4=3$, $a_5=4$, $a_6=4$, $a_7=4$, $a_8=5$라는 것을 확인할 수 있다.

(3-2) 제시문 (나)를 이용하면 귀류법으로 S가 1과 k를 항상 포함한다는 것을 증명할 수 있다.

(3-3) (a) 자연수 x,y,z,w에 대하여 $x+y\neq z+w$를 증명하기 위하여 $x+y>z+w$ 또는 $x+y<z+w$를 증명하면 된다. 이를 이용하면 주어진 집합이 흩어진 집합임을 증명할 수 있다.
(b) 제시문 (나)에서 $a=-1$, $b=p_k+1$로 놓고 집합 $\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$에 적용하면 조건을 만족하는 흩어진 집합을 찾을 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$a_7 = 4$를 구하면	3점
	$a_8 = 5$를 구하면	1점
	$a_4 = 3$을 보이고 답을 모두 구하면	1점
(3-2)	$M = k$를 보이면	3점
	$m = 1$을 보이면	4점
(3-3)(a)	서로 다른 자연수 $a > b > c > d$에 대하여 $p_a + p_d > p_b + p_c$를 보이면	5점
	위의 부등식을 이용하여 주어진 집합이 흩어진 집합임을 보이면	5점
(3-3)(b)	조건을 만족하는 흩어진 집합을 구하면	8점

7. 예시 답안

(3-1) $\{1, 2, 3\}$은 흩어진 집합이고 $\{1, 2, 3, 4\}$는 $1 + 4 = 2 + 3$이므로 흩어진 집합이 아니다. 그리고 $\{1, 2, 3, 5\}$는 흩어진 집합이므로 $a_4 = 3,\ a_5 = 4$이다. $\{1, 2, 3, 5, 8\}$은 흩어진 집합이므로 $a_8 \geq 5$이다.

$a_7 = 4$임을 보이자. $n(S) = 5$인 흩어진 집합 $S \subset \{1, 2, \cdots, 7\}$이 존재한다고 가정하자.

S의 가장 큰 원소를 M, 가장 작은 원소를 m이라 하면 $k \leq \dfrac{M - m}{2}$인 자연수 k에 대하여 두 자연수 $m + k$, $M - k$ 중 최대 하나만 S에 속할 수 있다. 따라서 S의 원소의 개수는 $2 + \dfrac{M - m}{2}$ 이하인데 $n(S) = 5$이므로 $m = 1,\ M = 7$이다. 2와 6 중 하나만 S에 속하고 3과 5 중 하나만 S에 속하므로 $4 \in S$이어야 하고, 각각의 경우를 확인해보면 $x + y = z + w$인 서로 다른 네 원소를 항상 찾을 수 있다. 이는 S가 흩어진 집합이라는 것에 모순이고, 따라서 $a_7 = 4$이다.

또한 $a_5 = 4,\ a_7 = 4$이므로 $a_6 = 4$이다. 따라서 조건을 만족하는 k는 $5, 6, 7$이다.

(3-2) 귀류법을 이용하여 $1, k \in S$임을 증명하자.

(i) $k \not\in S$라고 가정하자. 이때 $S \subset \{1, 2, \cdots, k-1\}$이고 S는 흩어진 집합이므로 $a_{k-1} \geq n(S) = a_k$이다. 이는 $a_{k-1} < a_k$에 모순이다. 따라서 $k \in S$이다.

(ii) $1 \not\in S$라고 가정하자. $S' = \{i - 1 \mid i \in S\}$라 하자. S의 모든 원소는 1보다 크기 때문에 S'의 모든 원소는 1 이상 $k - 1$ 이하이다. 그리고 제시문 (나)에 의하여 S'은 흩어진 집합이고 $a_{k-1} \geq n(S') = a_k > a_{k-1}$이 되어 모순이 생긴다. 따라서 $1 \in S$이다.

그러므로 $m = 1,\ M = k$이고 $M - m$으로 가능한 값은 $k - 1$뿐이다.

(3-3) (a) 1 이상 k 이하인 서로 다른 자연수 a, b, c, d가 존재하여 $p_a + p_b = p_c + p_d$라 가정하자.

일반성을 잃지 않고 $a > c > d > b$라 하자. a, c, d는 자연수이므로 $c \leq a - 1,\ d \leq a - 2$이다.

이때 $p_a = p_{a-1} + p_{a-2} \geq p_c + p_d = p_a + p_b > p_a$이므로 $p_a + p_b = p_c + p_d$라는 것에 모순이다. 귀류법에 의하여

$\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$는 흩어진 집합이다.

[별해] 수학적 귀납법으로 증명하자. $k=1$이면 $\{p_1\}=\{1\}$, $k=2$이면 $\{p_1,p_2\}=\{1,2\}$이므로 성립한다.
자연수 $k>2$에 대하여 명제가 $k-1$일 때 성립한다고 가정하고 k일 때 성립함을 보이자.
$A=\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$, $B=\{p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}\}$라 하자. A에 $x+y=z+w$를 만족하는 서로 다른 네 자연수 x,y,z,w가 속한다고 하자. 가정에 의해 B가 흩어진 집합이므로 x,y,z,w 중 하나는 반드시 p_k이어야 한다. 일반성을 잃지 않고 $a=p_k$라 하자. 그러면 $x+y\geq p_k+1$인데, $z+w\leq p_{k-1}+p_{k-2}=p_k$이므로 모순이다.
따라서 A는 흩어진 집합이고, k에 대하여도 명제는 성립한다.
그러므로 모든 자연수 k에 대하여 $\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$는 흩어진 집합이다.

(b) $S=\{p_k-p_i+1\mid i\text{는 } 1\leq i\leq k\text{인 자연수}\}$라 하면 조건 (i), (ii)를 만족한다. 이제 S가 흩어진 집합임을 증명하자. $x_1+x_2=x_3+x_4$인 서로 다른 네 개의 자연수 $x_1,x_2,x_3,x_4\in S$가 존재한다고 가정하자. $i=1,2,3,4$에 대하여 $y_i=p_k+1-x_i$라 정의하자. 그러면 제시문 (나)에 의하여 $y_1+y_2=y_3+y_4$이고 $y_1,y_2,y_3,y_4\in\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$가 성립한다. 이는 집합 $\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$가 흩어진 집합이라는 것에 모순이다. 따라서 S는 흩어진 집합이다.