2021학년도 수시모집

논술 모의고사 문제지

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자
수험번호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).
5. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.
6. **본인이 지원한 모집단위에 해당하는 문항을 선택하여 답안을 작성하시오.**

   (다른 모집단위 문항의 답안을 작성하면 0점 처리 됩니다.)

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

[자연계열 - 일반]

(의예과 제외)

☞ 의예과는 5쪽부터 푸시오.

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (점과 직선사이의 거리) 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

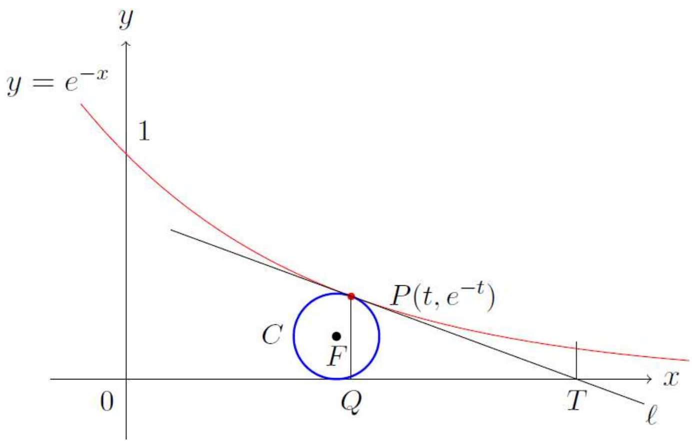
(나) (접선의 방정식) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(다) (합성함수의 미분법) 미분가능한 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ 또는 } \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(※) 아래 그림과 같이 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $P(t, e^{-t})$에서 접선 ℓ이 x축과 만나는 점을 T라 하고 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 하자. 이때 P를 지나고 x축과 ℓ에 동시에 접하는 원 C의 중심을 F, 반지름을 $r(t)$라 하고 Q에서 접선 ℓ까지의 거리를 $d(t)$라 하자.



(1-1) $r(a)d(a)=1$을 만족하는 a의 값을 구하시오. [10점]

(1-2) 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x^3)=x^2\left(r(x)+\frac{1}{d(x)}\right)\sin(\pi x)$$

를 만족할 때, $f'(0)$의 값을 구하시오. [10점]

(1-3) 점 T를 지나고 y축에 평행인 직선, 선분 PT, 곡선 $y=e^{-x}$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PFT의 넓이를 $A(t)$이라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{S(t)}$의 값을 구하시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 닫힌구간 $[a,b]$에서 함수 $f(x)$가 $c\in[a,b]$인 어떤 c와 $x\in[a,b]$를 만족하는 모든 x에 대하여 부등식 $f(x)\le f(c)$를 만족하면, 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $f(c)$를 갖는다.
 역으로 닫힌구간 $[a,b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(c)$ $(c\in[a,b])$라고 하면, $x\in[a,b]$인 모든 x에 대하여 부등식 $f(x)\le f(c)$이 성립한다.

(나) (최대·최소 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2-1) $f(x)=x^4-2x^2$일 때, 닫힌구간 $[a,b]$의 부분집합

$$\{c\in[a,b]\,|\,\text{모든 } x\in[a,b] \text{ 에 대하여}, f(c)\ge f(x)\}$$

의 원소의 개수가 3이다. a,b의 값을 구하시오. [10점]

(2-2) $f(x)=\sin(x^2)$에 대하여 $\sqrt{2\pi n}$을 포함하는 닫힌구간 $[a,b]$ 중에서 부분집합

$$\{c\in[a,b]\,|\,\text{모든 } x\in[a,b] \text{ 에 대하여}, f(c)\ge f(x)\}$$

의 원소의 개수가 3이고 $b-a$의 값이 최소인 것을 $[a_n,b_n]$이라고 하자. (단, $n=1,2,\ldots$.)

$b_n-a_n<\dfrac{\sqrt{\pi}}{5}$인 가장 작은 자연수 n의 값을 구하시오. [10점]

(2-3) 양수 α에 대하여 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(i) $g(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수이다.
(ii) 모든 $x\in[0,1]$에 대하여 $0\le g(x)\le 1$이다.
(iii) 모든 $x\in[0,1]$와 모든 $t\in[0,1]$에 대하여 $\sin(\alpha x+g(x))\ge\sin(\alpha x+t)$이다.

(a) $\alpha=2$일 때 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. [5점]

(b) 위 조건을 만족하는 함수 $g(x)$가 존재하도록 하는 양수 α의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f''(x) \geq 0$이고 어떤 실수 a에서 $f'(a)=0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값을 갖는다.

(나) (사잇값 정리) 함수 $f(x)$가 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이라고 하자. $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 k에 대하여 $f(c)=k$인 $c \in (a, b)$가 적어도 하나 존재한다.

(다) (합성함수의 미분법) 미분가능한 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ 또는 } \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(※) 실수 전체 집합에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(i) 모든 실수 x에 대하여 $2\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2 \leq f(x)f''(x)$이다.
(ii) 곡선 $y=f(x)$의 $x=0$에서의 접선은 $y=1$이다.

(3-1) $f(x)>0$일 때

$$\frac{d^2}{dx^2}\{\ln f(x)\} \geq 2$$

임을 보이시오. [10점]

(3-2) 함수 $g(x)=\{f(x)\}^2$는 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 1$임을 보이시오. [10점]

(3-3) 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) \geq e^{x^2}$$

임을 보이시오. [15점]

[자연계열 - 의예과]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (점과 직선사이의 거리) 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

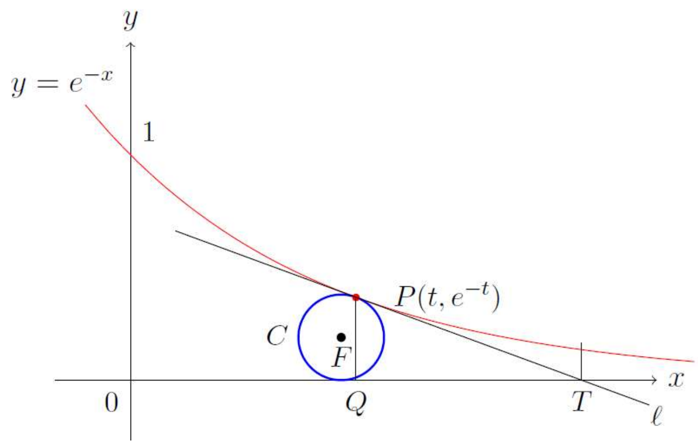
(나) (접선의 방정식) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(다) (합성함수의 미분법) 미분가능한 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ 또는 } \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(※) 아래 그림과 같이 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $P(t, e^{-t})$에서 접선 ℓ이 x축과 만나는 점을 T라 하고 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 하자. 이때 P를 지나고 x축과 ℓ에 동시에 접하는 원 C의 중심을 F, 반지름을 $r(t)$라 하고 Q에서 접선 ℓ까지의 거리를 $d(t)$라 하자.



(1-1) $r(a)d(a)=1$을 만족하는 a의 값을 구하시오. [10점]

(1-2) 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x^3)=x^2\left(r(x)+\frac{1}{d(x)}\right)\sin(\pi x)$$

를 만족할 때, $f'(0)$의 값을 구하시오. [10점]

(1-3) 점 T를 지나고 y축에 평행인 직선, 선분 PT, 곡선 $y=e^{-x}$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PFT의 넓이를 $A(t)$이라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{S(t)}$의 값을 구하시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 닫힌구간 $[a,b]$에서 함수 $f(x)$가 $c\in[a,b]$인 어떤 c와 $x\in[a,b]$를 만족하는 모든 x에 대하여 부등식 $f(x)\le f(c)$를 만족하면, 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $f(c)$를 갖는다. 역으로 닫힌구간 $[a,b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f(c)$ $(c\in[a,b])$라고 하면, $x\in[a,b]$인 모든 x에 대하여 부등식 $f(x)\le f(c)$이 성립한다. (나) (최대·최소 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2-1) $f(x)=x^4-2x^2$일 때, 닫힌구간 $[a,b]$의 부분집합

$$\{c\in[a,b]\mid \text{모든 } x\in[a,b] \text{ 에 대하여}, f(c)\ge f(x)\}$$

의 원소의 개수가 3이다. a,b의 값을 구하시오. [10점]

(2-2) $f(x)=\sin(x^2)$에 대하여 $\sqrt{2\pi n}$을 포함하는 닫힌구간 $[a,b]$ 중에서 부분집합

$$\{c\in[a,b]\mid \text{모든 } x\in[a,b] \text{ 에 대하여}, f(c)\ge f(x)\}$$

의 원소의 개수가 3이고 $b-a$의 값이 최소인 것을 $[a_n,b_n]$이라고 하자. (단, $n=1,2,\ldots$.)

$b_n-a_n<\dfrac{\sqrt{\pi}}{5}$인 가장 작은 자연수 n의 값을 구하시오. [10점]

(2-3) 양수 α에 대하여 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(i) $g(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수이다. (ii) 모든 $x\in[0,1]$에 대하여 $0\le g(x)\le 1$이다. (iii) 모든 $x\in[0,1]$와 모든 $t\in[0,1]$에 대하여 $\sin(\alpha x+g(x))\ge\sin(\alpha x+t)$이다.

(a) $\alpha=2$일 때 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. [5점]

(b) 위 조건을 만족하는 함수 $g(x)$가 존재하도록 하는 양수 α의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 다음과 같이 어떤 명제가 참임을 증명하는 방법을 '수학적 귀납법'이라 한다. 모든 $k=0,1,2,...,N$에 대하여 명제 $p(k)$가 성립함을 증명할 때, 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) 명제 $p(0)$이 성립한다.

(ii) $k \le N$에 대하여 명제 $p(k-1)$이 성립한다고 가정하면, 명제 $p(k)$가 성립한다.

(나) 수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$과 자연수 m에 대하여 $a_{i+1},\ a_{i+2},\ \ldots\ ,\ a_{i+m}$과 같이 연속된 m개의 항을 'm-토막'이라고 부르고, 이 m-토막의 항의 합을 기호

$$S(i, i+m] = a_{i+1} + a_{i+2} + \ \cdots \ + a_{i+m}$$

으로 나타내자. 이때, a_{i+j}는 이 m-토막의 j번째 항이다.

(※) 수열 $\{a_n\}$의 첫 m^2+m개의 항 $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_{m^2+m-1},\ a_{m^2+m}$이 다음 조건을 만족한다. (단, $m>1$)

(i) 모든 $1 \le i \le m^2+m$에 대하여 $a_i = 0$ 또는 1이다.

(ii) 모든 $0 \le i \le m^2-m$에 대하여

$$a_{i+1} + \ \cdots \ + a_{i+m} < a_{i+m+1} + \ \cdots + a_{i+2m},\ \text{즉}\ S(i, i+m] < S(i+m, i+2m]\text{이다.}$$

(3-1) $0 \le k \le m$일 때, $S(km, (k+1)m] = k$임을 보이시오. [10점]

(3-2) 이제 수학적 귀납법을 이용하여 다음 명제를 증명하고자 한다.

[명제] $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_{m^2+m-1},\ a_{m^2+m}$이 다음과 같은 $m+1$개의 m-토막으로 이루어져 있다.

$$\underbrace{0,\ \ldots\ ,0}_{m\text{개}},\ \underbrace{0,\ \ldots\ ,0,1}_{m\text{개}},\ \underbrace{0,\ \ldots\ ,0,1,1}_{m\text{개}},\ \cdots\ ,\underbrace{0,1,\ \ldots\ ,1}_{m\text{개}},\ \underbrace{1,1,\ \ldots\ ,1}_{m\text{개}} \qquad \text{-------- } (*)$$

(*)에서와 같이 수열 $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_{m^2+m-1},\ a_{m^2+m}$을 m-토막을 $m+1$개의 m-토막으로 나타내었을 때, 왼쪽부터 오른쪽까지 차례로 0번째, 1번째, ... , m번째 m-토막이라 부르자. 위 명제를 증명하려면 다음 명제 $p(k)$가 $0 \le k \le m$인 모든 k에 대하여 성립함을 보이면 된다.

[명제 $p(k)$] k번째 $(0 \le k \le m)$ m-토막 $a_{km+1}, a_{km+2},\ \ldots\ ,\ a_{(k+1)m}$이 다음과 같다.

$$\underbrace{0,\ \ldots\ ,0}_{m-k},\underbrace{1,1,\ \ldots\ ,1}_{k}$$

이것이 $k=0$일 때 성립함을 보인 후, $k-1$번째 m-토막에 대하여 성립한다고 가정하고, k번째 m-토막에 대해 성립함을 보이면 된다.

(a) 명제 $p(k-1)$이 성립한다고 가정하고, k번째 m-토막에서 처음 1이 나오는 것이 ℓ번째 항이라 가정하자. $j=k, k+1,\ \ldots\ , m$에 대하여 $S(\ell+(j-1)m,\ \ell+jm]$의 값을 구하시오. [10점]

(b) 명제 $p(k)$가 모든 $k=0,1,...,m$에 대하여 성립함을 보이시오. [15점]

(단, 이 명제가 주어진 조건에 대한 충분조건임을 보일 필요는 없다.)

<연 습 장>

<연 습 장>