2021학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	이차방정식의 근과 판별식, 도함수의 활용, 함수의 증가와 감소	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> **(이차방정식의 근의 판별)** 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때
> (1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> (2) $D=0$이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
> (3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(1-1) 이차함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$의 그래프가 점 $(1,7)$을 지나도록 하는 실수 p의 값을 모두 구하시오.
(5점)

(1-2) 점 (a,b)에 대하여, 곡선 $y=(x-p)^2+p^2+2$가 점 (a,b)를 지나도록 하는 실수 p가 존재할 때,
a, b가 만족하는 조건을 구하시오. (10점)

(1-3) 점 $(-12,-1)$로부터 곡선 $y=(x-p)^2+p^2+2$ 위의 점까지의 거리 중 최솟값을 $f(p)$라고 하자.
함수 $f(p)$의 최솟값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

이 문항는 포물선이 한 점을 지날 조건을 이차방정식이 실근을 가질 조건으로 연결시킬 수 있음을 평가하고자 하였다. 그리고 다항함수의 도함수를 분석하여 다항함수의 최솟값을 구하는 능력을 평가하고자 하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
■ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학)</td></tr>
<tr><td>전체</td><td>성취기준1</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식
[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학II)</td></tr>
<tr><td>전체</td><td>성취기준1</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용
[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	황선욱 외	미래N	2020	59쪽	(가)	
수학	류희찬 외	천재교과서	2020	56쪽	(가)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(1-1) 주어진 점을 대입하여 얻은 이차방정식을 간단한 인수분해를 통하여 근을 구할 수 있다.

(1-2) 포물선이 한 점을 지날 조건은 한 점이 함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$에 의해 주어지는 방정식을

만족한다는 것이다. 즉, p가 실수로서 존재해야 하므로 이는 p를 변수로 하는 이차방정식이 근을 가질 조건이다. 따라서 판별식이 0보다 크거나 같을 조건을 통해서 구할 수 있다.

(1-3) (1-2)에서 구한 모든 (a,b)와 $(-12,-1)$사이의 거리의 최솟값을 구하면 된다. 피타고라스 정리와 (1-2)의 부등식을 이용하면 최솟값이 될 함수 $\sqrt{(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2}$를 찾을 수 있다. 여기서 얻어진 함수의 제곱은 다항함수가 된다. 이 다항함수의 도함수를 분석해보면 한 개의 0를 갖고 도함수의 부호가 음수에서 양수로 변하므로 함수의 증감에 의해 도함수가 0이 되는 점에서 거리의 최솟값을 갖는다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	점을 대입하여 이차방정식을 구함	2점
	인수분해를 통하여 실수 p값을 모두 구함	3점
(1-2)	(a,b)를 함수에 대입하여 (a,b)가 만족하는 방정식을 인지함	5점
	방정식을 p에 대한 방정식으로 인지하여 판별식을 적용하여 조건을 구함	5점
(1-3)	(1-2)의 부등식을 이용하여 거리의 최솟값이 될 함수를 찾음	4점
	도함수를 이용하여 도함수가 0이 되는 점을 찾음.	4점
	도함수의 부호를 통하여 도함수가 0이 되는 점에서 최솟값을 가짐을 인지	4점
	거리가 최소가 되는 점을 대입하여 거리를 구함	3점

7. 예시 답안

(1-1) 점 $(1,7)$을 이차함수에 대입하여 얻은 방정식 $7=(1-p)^2+p^2+2$의 해를 구하면 된다. $p=2$ 또는 $p=-1$이 되어 $(-1,3),(2,6)$이 구하고자 하는 점이다.

(1-2) 이차함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$의 그래프가 점 (a,b)를 지나면 $b=(a-p)^2+p^2+2$을 만족하는 실수 p가 존재한다. 방정식을 p에 대해서 정리하면 $2p^2-2ap+a^2-b+2=0$. 실근이 존재하기 위해서는 제시문에 의해 $D=a^2-2(a^2-b+2)\geq 0$가 된다. 따라서 $b\geq (a^2+4)/2$.

(1-3) 구하고자 하는 최솟값은 점 (a,b)를 지나는 이차함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$의 그래프가 존재하는 모든 점 (a,b)에 대해서 $(-12,\ -1)$로부터의 거리 $\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2}$ 중

최솟값을 구하면 된다. 이를 만족하는 a,b의 조건은 문제 (1-2)에서와 같이 $b \geq (a^2+4)/2$를 만족한다. 따라서 $b+1 \geq (a^2+4)/2+1>0$ 이므로

$$\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2} \geq \sqrt{(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2}$$

가 성립하고 따라서 $\sqrt{(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면 된다. 함수 $f(a)=(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2$의 도함수는 $f'(a)=a^3+8a+24=(a^2-2a+12)(a+2)$이고 $a^2-2a+12=(a-1)^2+11>0$이므로 $a<-2$에서는 $f'(a)<0$이고 $a>-2$에서는 $f'(a)>0$이므로 $a=-2$에서 최솟값을 갖는다. 그러므로 구하고자 하는 거리는 $(10^2+25)^{1/2}=\sqrt{125}$ 가 된다.

별해 (1-3) 구하고자 하는 최솟값은 점 (a,b)를 지나는 이차함수 $y=(x-p)^2+p^2+2$의 그래프가 존재하는 모든 점 (a,b)에 대해서 $(-12,-1)$로부터의 거리 $\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2}$ 중 최솟값을 구하면 된다. 이를 만족하는 a,b의 조건은 문제 (1-2)에서와 같이 $b \geqq (a^2+4)/2$를 만족한다. 따라서 $b+1 \geqq (a^2+4)/2+1>0$ 이므로

$$\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2} \geq \sqrt{(a+12)^2+((a^2+4)/2+1)^2}$$

가 된다. 따라서 $b=(a^2+4)/2$를 만족하는 $(a,\, b)$에서 $(-12,-1)$까지의 거리 중 최솟값을 구하면 된다. $y=(x^2+4)/2$ 위의 한 점 $(a,\, b)$에서의 법선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{a}(x-a)+\dfrac{a^2+4}{2}$가 된다. 거리가 최소가 될 때는 이 법선이 $(-12,-1)$을 지날 때이므로 대입하여 방정식을 정리하면 $(a+2)(a^2-2a+12)=0$이 되어 $a=-2$일 때 $(-12,-1)$과의 거리가 최소가 된다. 이 때 거리는 $\sqrt{125}$ 가 된다.

2021학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	연속함수, 사잇값 정리, 접선의 방정식, 삼각함수의 미분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> **(사잇값 정리)** 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(2-1) $0 \leq t \leq 2\pi$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=2\sin x$와 직선 $y=x-t$의 교점이 1개가 되도록 하는 t의 값의 범위를 구하시오. (10점)

(2-2) 양수 α에 대하여 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족한다.

> (i) $g(t)$는 구간 $[0,2\pi)$에서 연속이다.
> (ii) $0 \leq t < 2\pi$인 모든 실수 t에 대하여, $2\sin(g(t))=g(t)-\alpha t$이다.

(a) $\alpha=1$일 때, $k \leq g(0) < k+1$을 만족하는 정수 k의 값을 구하시오. (10점)

(b) 위 조건을 만족하는 함수 $g(t)$가 존재하도록 하는 α의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

삼각함수의 그래프의 개형과 접선의 방정식을 이해하고 있는지 평가하고, 사잇값 정리를 이용하여 연속함수의 성질을 파악할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>☐ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
☐ 수학 ☐ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분 ☐ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td>
<table>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학 Ⅱ)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">전체</td><td>성취기준 1</td><td>[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분)</td></tr>
<tr><td>전체</td><td>성취기준 1</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	36-40	(사잇값 정리)	
수학 Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2020	34-39	(사잇값 정리)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(2-1) 문항은 삼각함수의 개형을 그릴 수 있고 주어진 조건이 $y=2\sin x$에서 기울기가 1인 접선과 관계가 있다는 것을 파악할 수 있는지 평가한다.

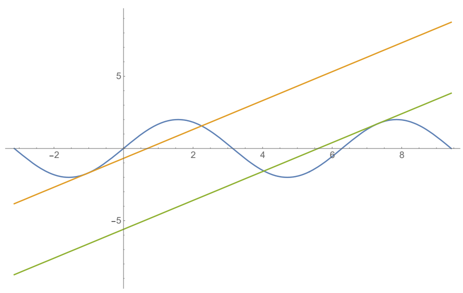
(2-2) 문항은 주어진 조건을 (2-1)과 같이 직선과 $y=2\sin x$의 교점의 x좌표로 해석해 내고, 사잇값 정리를 이용해서 교점의 위치를 파악하고 연속함수 여부를 판단할 수 있는지 평가한다. 실제로 (2-2)문항의 발문 형태는 올해 본교의 모의논술과 매우 유사하게 출제하여서 모의논술을 참고해서 시험준비를 한 수험생들이 익숙한 느낌을 가질 수 있도록 하였다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	직선 $y = x - t$가 곡선 $y = 2\sin x$와 접하는 조건을 구하면	5
	실제로 t의 범위를 정확히 계산하면	5
(2-2) (a)	$g(t)$가 직선 $y = 2\sin x$와 $y = x - t$의 교점의 x좌표임을 파악하면	2
	$g(t)$가 연속함수라는 사실과 사잇값 정리를 이용해서 $g(0)$이 양수여야 한다는 사실을 파악하면	4
	실제로 $g(0)$의 정수부분을 사잇값 정리를 이용해서 정확히 구하면	4
(2-2) (b)	그래프의 개형을 이용하여 α가 $y = x - 2\pi\alpha$가 $y - 2\sin x$에서 $x = \frac{5\pi}{3}$에서 접하게 하는 값 또는 이보다 작은 값에서는 $g(x)$가 $[0, 2\pi)$에서 연속이고, 이보다 큰 값에서는 $g(x)$가 $[0, 2\pi)$에서 연속함수가 될 수 없음을 설명하면 (단, 엄밀한 증명은 제시하지 않아도 되고, 직관적으로 그래프의 개형을 이용해서 개략적인 설명을 하면 충분함.)	10
	- 조건을 만족하는 α의 값을 정확히 계산하면	5

7. 예시 답안

(2-1) $y = 2\sin x$ 함수의 그래프의 개형으로부터 구하려는 t는 직선 $y = x - t$가 곡선 $y = 2\sin x$와 $-\pi < x < 0$에서 접할 때와 $2\pi < x < 3\pi$에서 접할 때의 사이에 있는 경우이다.



함수 $y = 2\sin x$의 도함수는 $y' = 2\cos x$이므로, 구하려는 접하는 점은 $(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3})$과 $(\frac{7\pi}{3}, \sqrt{3})$이다. 따라서 구하려는 t의 범위는 $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} < t < \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$이다.

(2-2) (a) $0 \le t \le 2\pi$일 때 $(g(t), 2\sin g(t))$는 두 곡선 $y = 2\sin x$와 $y = x - t$의 교점이다. $g(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $2\sin x = x$인 x의 값으로 각각 음수, 0, 양수인 세 개의 실수이

다. 그런데, (2-1)의 결과에서 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}< t < \frac{7\pi}{3}-\sqrt{3}$일 때, 그래프의 개형을 보면 $g(t)$는 $\frac{\pi}{2}$보다 큰 양수 값을 가져야 한다.

만일 $g(0)\leq 0$이었다면 사잇값 정리로부터 예를 들어 $g(t)=\frac{\pi}{2}$인 t의 값이 존재해야 하는데, $t>0$인 범위에서 직선 $y=x-t$와 곡선 $y=2\sin x$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{2}$가 될 수는 없다.
따라서 $g(0)$은 양수 이어야한다.
이때 $2\sin(\frac{\pi}{2})=2>\frac{\pi}{2}$이고 $2\sin(2)<2$이므로, $1<\frac{\pi}{2}<g(0)<2$이고, 따라서 $k=1$이다.
(다른 방법: $2\sin(\frac{5\pi}{8})=\sqrt{2-2\cos(\frac{5\pi}{4})}=\sqrt{2+\sqrt{2}}<\frac{15}{8}$이다. 마지막 부등식은 양변을 제곱하면
$2+\sqrt{2}<\frac{225}{64}$ 즉 $\sqrt{2}<\frac{97}{64}$임을 보이면 되는데, $1.5=\frac{96}{64}<\frac{97}{64}$이고, $2<1.5^2=2.25$이므로 성립한다.
따라서 $2\sin(\frac{5\pi}{8})<\frac{5\pi}{8}$이므로, $g(0)<\frac{5\pi}{8}<2$이다.)

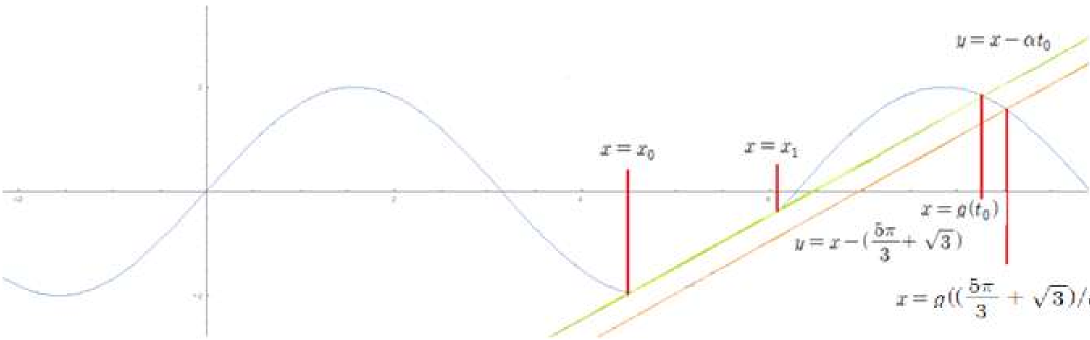
(b) $(g(t), 2\sin g(t))$는 두 곡선 $y=2\sin x$와 $y=x-\alpha t$의 교점이다.
$0\leq t<2\pi$이면, $0\leq \alpha t<2\pi\alpha$이다.
$2\pi\alpha$가 직선 $y=x-2\pi\alpha$가 곡선 $y=2\sin(x)$에서 $x=\frac{5\pi}{3}$에서 접하게 하는 $2\pi\alpha$의 값인 $\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$보다 작거나 같으면, 즉 $\alpha\leq\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이면 $g(t)$는 $\frac{\pi}{2}<g(t)<\frac{5}{3}\pi$ 범위에서 연속함수로 정의할 수 있다. 이는 그래프의 개형으로부터 직관적으로 설명된다.
$\alpha>\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이라면, 그래프의 개형과 사잇값 정리로부터 $\alpha t<\frac{7\pi}{3}-\sqrt{3}$인 경우 $g(t)<2\pi$이고 $\alpha t>\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$인 경우 $g(t)>2\pi$이어야 하는데, $g(t)$가 $y=2\sin x$와 $y=x-\alpha t$의 교점의 x좌표가 되도록 연속적으로 만들 방법이 없다. 그러므로 조건을 만족하는 α의 최댓값은 $\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이다.

[참고1] 실제로 $\alpha=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, $g(t)$는 $0\leq t<2\pi$일 때, $\frac{\pi}{2}<g(t)<\frac{5}{3}\pi$이고
$2\sin(g(t))=g(t)-\alpha t$가 되도록 잡았을 때 $g(t)$가 주어진 구간에서 연속이라는 사실은 다음과 같이 엄밀하게 증명할 수 있다.
a와 t를 $0\leq a, t<2\pi$인 임의의 두 실수 (단, $t\neq a$)라고 하면,
$2\sin g(t)=g(t)-\alpha t$, $2\sin g(a)=g(a)-\alpha a$이므로
$g(t)-g(a)-2(\sin g(t)-\sin g(a))=\alpha(t-a)$이고
평균값의 정리에 의해 $2\sin g(t)-2\sin g(a)=2\cos x\ ((g(t)-g(a))$인 x (x는 $g(a), g(t)$)사이의

실수)가 존재한다. $\cos x < \frac{1}{2}$이므로, $g(t) = g(a) + \frac{\alpha}{1+2\cos x}(t-a)$ (x는 $g(a), g(t)$)사이의 실수)이다. 따라서 $\lim_{t \to a} g(t) = g(a) + \frac{\alpha}{1+2\cos a} \lim_{t \to a}(t-a) = g(a)$ 이다.

[참고2] $\alpha > \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이라면, $g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha)$은 두 곡선 $y = 2\sin x$와 $y = x - (\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})$의 교점의 x좌표이고, 각각 2π보다 작거나 큰 두 개의 실수 값 중의 하나이다. (a)에서와 같은 방법으로 사잇값 정리에 의하여 $g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha) < 2\pi$인 경우 모순이므로 $g((\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3})/\alpha) > 2\pi$이다. $g(t)$의 연속성에 의해

$t_0 < (\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3})/\alpha$이고, t가 구간 $[t_0, (\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi})/\alpha]$에 속할 때 $g(t) > 2\pi$인 t_0값이 존재한다.

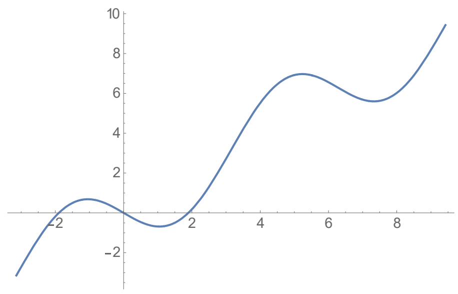


그렇게 되면, 함수 $g(t)$ $(0 \le t < 2\pi)$의 치역에서 제외되는 구간 (x_0, x_1) ($\pi < x_0 < x_1 < 2\pi$)이 존재하므로, 사잇값 정리에 의해 $g(t)$의 연속성에 모순이다.

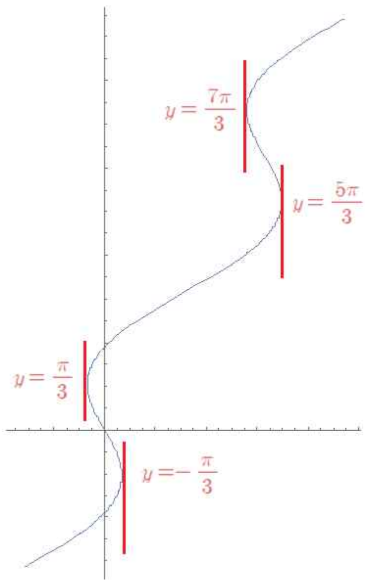
[별해]

(2-1) $f(x) = x - 2\sin x$의 미분계수 $f'(x) = 1 - 2\cos x$가 0이 되는 점 $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ 중에서 $x = -\frac{\pi}{3}$와 $x = \frac{7\pi}{3}$에서의 함숫값 사이에 t가 있을 때 방정식 $t = x - 2\sin x$가 해를 1개 갖는다.

$f(-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$, $f(\frac{7\pi}{3}) = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$이므로, 구하려는 t의 범위는 $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} < t < \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$이다.

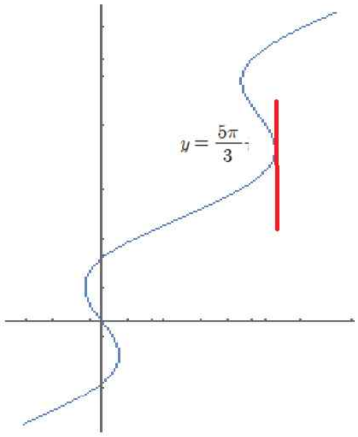


(2-2) (a) $f(x)=x-2\sin x$라고 하면 조건에서 $f(g(t))=t$이고 $g(t)$는 $[0,2\pi)$에서 연속이다.



조건의 등식이 성립할 필요충분조건은 $y=g(x)$의 그래프가 $y=f(x)$의 그래프를 $y=x$에 대칭이동시킨 곡선$x=f(y)$ (위 그림)의 부분집합이 되는 것이다. $y=g(x)$는 $[0,\pi)$에서 연속함수가 되어야 하므로, $g(0)>0$이고, 원래의 예시답안에서와 같이 사잇값 정리를 이용하여 $g(0)$의 정수부분이 1임을 확인할 수 있다.

(b) $f(x)=\dfrac{x-2\sin x}{\alpha}$라고 하면 $g(x)$는 $[0,2\pi)$에서 연속함수여야 하므로, $x=f(y)$의 그래프에 접하는 직선이 y축에 평행이 되도록 하는 y값 $y=\dfrac{5\pi}{3}$을 갖는 $x=f(y)$위의 점의 x좌표가 2π가 될 때 α가 최대가 된다.



즉, α가 최대일 때 $f(\frac{5\pi}{3})=\frac{\frac{5\pi}{3}-\sqrt{3}}{\alpha}=2\pi$이고, $\alpha=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$이다.

2021학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 오전 ■ 오후
			□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	적분과 미분의 관계, 이계도함수	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오

(가) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a < x < b)$$

가 성립한다. 그러므로 $a < c < b$일 때,

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt = f(c)$$

가 성립한다.

(나) 0을 포함하는 열린구간 (a,b)에서 두 번 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여

(i) 열린구간 $(0, b)$에서 $g''(x) < 0$이고 $g(0) = g'(0) = 0$이면 열린구간 $(0, b)$에서 $g(x) < 0$이다.

(ii) 열린구간 $(a, 0)$에서 $g''(x) < 0$이고 $g(0) = g'(0) = 0$이면 열린구간 $(a, 0)$에서 $g(x) < 0$이다.

(※) 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt \le \frac{xf(x)}{2}$$ 를 만족한다.

(3-1) 함수 $g(x) = \dfrac{xf(x)}{2} - \displaystyle\int_0^x f(t)dt$의 이계도함수 $g''(x)$를 $f(x)$를 이용하여 표현하시오. (8점)

(3-2) $f(0)$의 값을 구하시오. (10점)

(3-3) 함수 $f(x)$가 $f(x) = (x^2 + px + q)e^x$으로 주어질 때, 상수 p, q의 값을 구하시오. (17점)

3. 출제 의도

정적분과 미분의 관계를 활용하여 정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 평가한다. 이계도 함수를 계산하고 이를 이용하여 그래프의 개형을 파악할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정" □ 수학 □ 수학 Ⅰ ■ 수학 Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅱ)
(가)	성취기준 1	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ② 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
	성취기준2	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.

관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분)
(나)	성취기준 3	[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.
	성취기준 4	[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	125-130	(가)	
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	121-125	(가)	
미적분	홍성복 외	지학사	2020	112-116	(나)	재구성
미적분	이준열 외	천재교육	2020	115-120	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우- 해당사항 없음

5. 문항 해설

(3-1) 정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 평가한다.

(3-2) 정적분과 미분의 관계, 미분의 정의를 이용하여 정적분으로 주어진 함수의 미분계수를 계산할 수 있는지를 평가한다.

(3-3) 이계도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 파악하고 주어진 부등식의 의미를 이해할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	- $g'(x)$을 계산함.	5점
	- $g''(x)=\dfrac{xf''(x)}{2}$임을 보임.	3점
(3-2)	- $f(0)\le 0$임을 보임.	5점
	- $f(0)\ge 0$임을 보임.	5점
(3-3)	- $x>0$일 때 주어진 조건을 이용하여 $f''(0)\ge 0$임을 보임.	7점
	- $x<0$일 때 주어진 조건을 이용하여 $f''(0)\le 0$임을 보임.	7점
	- $p=-1,\ q=0$임을 보이고 $f(x)=(x^2-x)e^x$이 주어진 조건을 만족함을 보임.	3점

7. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)의 미분과 적분과의 관계를 이용하면

$$g'(x)=\frac{f(x)+xf'(x)}{2}-f(x)=\frac{-f(x)+xf'(x)}{2}$$

이다. 그러므로 $g''(x)=\dfrac{xf''(x)}{2}$이다.

(3-2) $x>0$이면 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\le\dfrac{f(x)}{2}$이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\le\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$$

이고 $f(0)\le 0$이다.

$x<0$이면 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\ge\dfrac{f(x)}{2}$이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \geq \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$$

이고 $f(0)\geq 0$이다.

따라서 $f(0)=0$이다.

(3-3) $f(0)=0$이므로 $q=0$이다. 그러므로

$$f'(x)=(x^2+(p+2)x+p)e^x,\ f''(x)=(x^2+(p+4)x+2p+2)e^x$$

이다.

만약 $f''(0)<0$이면 0을 포함하는 어떤 구간 (a,b)에서 $f''(x)<0$이다.
1), 2)의 결과에 의해 $g(0)=g'(0)=0$이고 구간 $(0,b)$에서 $g''(x)<0$이므로 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0,b)$에서 $g(x)<0$이다. 따라서 주어진 조건에 모순이다.

만약 $f''(0)>0$이면 0을 포함하는 어떤 구간 (a,b)에서 $f''(x)>0$이다.
1), 2)의 결과에 의해 $g(0)=g'(0)=0$이고 구간 $(a,0)$에서 $g''(x)<0$이므로 제시문 (나)로부터 구간 $(a,0)$에서 $g(x)<0$이다. 따라서 주어진 조건에 모순이다.

따라서 $f''(0)=0$이고 $p=-1$이다.

위에서 구한 $f(x)=(x^2-x)e^x$는 $f''(x)=(x^2+3x)e^x$을 만족한다. 그러므로 $g''(x)=\frac{1}{2}(x^3+3x^2)e^x$이고 $g'(x)=\frac{1}{2}x^3e^x$이다. 따라서 $x>0$일 때 $g'(x)>0$이고 $x<0$일 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)\geq g(0)=0$이다.
따라서 $f(x)$은 주어진 조건을 만족한다.
(혹은, 구간 $(0,\infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 $-g(x)$에 제시문 (나)를 적용하면 구간 $(0,\infty)$에서 $-g(x)<0$이다. $x<0$일 때 원점과 점 $(x,f(x))$를 잇는 선분은 $y=f(x)$의 그래프의 아래쪽에 있다. 즉, $x\leq t\leq 0$일 때 $f(t)\geq\frac{f(x)}{x}t$이다. 그러므로

$$\int_x^0 f(t)dt>\int_x^0\frac{f(x)}{x}t\,dt=-\frac{xf(x)}{2}$$

이다. 즉, $x<0$일 때 $g(x)>0$이다. 따라서 $f(x)$은 주어진 조건을 만족한다.)