2021학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	함수의 그래프의 개형, 방정식에의 활용, 곡선과 좌표축 사이의 넓이	
예상 소요 시간	30분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 계수가 실수인 삼차다항식 x^3+ax^2+bx+c가 실수 α, β, γ에 대해 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 인수분해 되는 경우, 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$은 세 실근 α, β, γ를 갖는다고 한다.
(단, α, β, γ의 값이 서로 다를 필요는 없다.)

(나) 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$이 세 실근 α, β, γ를 가지면, 등식

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

이 성립하므로 근과 계수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\alpha+\beta+\gamma=-a, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b, \quad \alpha\beta\gamma=-c$$

(1-1) 삼차방정식 $x^3-x-t=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 t의 값의 범위를 구하시오. (8점)

(1-2) 삼차방정식 $x^3-x-t=0$이 세 실근 α, β, γ $(\alpha \le \beta \le \gamma)$를 갖는다.

(a) 실근 β의 값의 범위를 구하시오. (5점)

(b) 곡선 $y=x^3-x-t$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 β로 나타내고, S의 최솟값을 구하시오. (17점)

3. 출제 의도

이 문제는 방정식의 실근을 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표로 이해할 수 있는지, 곡선과 좌표축 사이의 넓이를 정적분으로 연결시킬 수 있는지, 다항식의 연산을 수행할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정" ■ 수학 ☐ 수학 Ⅰ ■ 수학 Ⅱ ☐ 미적분 ☐ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(가)	성취기준1	[수학] - (1) 문자와 식 - ③ 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학)
	(나)	성취기준1	[수학] - (1) 문자와 식 - ② 나머지정리 [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
	(나)	성취기준2	[수학] - (1) 문자와 식 - ① 다항식의 연산 [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.
	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학II)
	공통	성취기준1	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용 [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
		성취기준2	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
		성취기준3	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학	고성은 외	좋은책 신사고	2020	78쪽	(가)	
수학	황선욱 외	미래N	2020	84쪽	(가)	
수학	김원경 외	비상	2020	53쪽	(나)	재구성
수학	류희찬 외	천재교과서	2020	62쪽	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(1-1) 방정식에서의 활용에서와 같이 방정식을 두 함수 $y=x^3-x$와 $y=t$의 그래프의 교점으로 이해하면 풀이가 용이하다. 삼차함수의 그래프의 개형에서 극값이 갖는 의미를 바탕으로 방정식의 근의 개수를 연결시키면 $y=x^3-x$의 두 극값 사이에 t값이 존재할 때 서로 다른 세 실근을 가짐을 알 수 있다.

(1-2)(a) 문항 (1-1)과정에서 사잇값 정리를 통해서 서로 다른 세 실근을 갖는 경우는 어렵지 않게 알 수 있다. 또한 t가 극값을 취하게 되면 그래프의 개형을 바탕으로 하나의 중근과 다른 한 근을 갖게 되므로 이 경우를 포함시키면 구하고자 하는 범위를 구할 수 있다.

(1-2)(b) 본 문항의 적분은 다항식의 적분으로써 기본적인 정적분을 적용하면 된다. 근과 계수의 관계에 의해서 주어진 관계식과 α, β, γ가 방정식의 근이 됨을 이용하여 식을 β에 관하여 정리하면 되는 문제이다. 이후 완전제곱식과 양수의 합의 형태로 나타낼 수 있으므로 (1-2)(a)에서 구한 β의 범위를 바탕으로 기본적인 부등식 연산을 이용하여 최솟값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	미분을 통하여 $y=x^3-x$ 또는 $y=x^3-x-t$의 도함수가 0인 점을 찾음	4점
	t가 극값 사이에 존재해야 함을 인지함	4점
(1-2)(a)	(1-1)에서 구한 두 극값을 갖는 점 사이의 범위를 인지함	2점
	서로 같은 두 실근을 인지함	3점
(1-2)(b)	적분을 α, β, γ의 식으로 올바르게 나타냄.	5점
	근과 계수의 관계와 α, β, γ가 $x^3-x-t=0$의 근임을 인지하여 관계식을 구함	2점
	적분을 β에 관한 식으로 나타냄	5점
	부등식 또는 이차함수의 최솟값을 이용하여 최솟값을 구함	5점

7. 예시 답안

(1-1) $x^3-x-t=0$의 근을 함수 $y=x^3-x$와 $y=t$의 그래프들의 교점으로 생각하자. 함수 $y=x^3-x$가 $x=-1/\sqrt{3}$에서 극댓값 $2/\sqrt{3}^3$과 $x=1/\sqrt{3}$에서 극솟값 $-2/\sqrt{3}^3$을 갖는다. 따라서 $-2/\sqrt{3}^3<t<2/\sqrt{3}^3$일 때, 사잇값 정리에 의해서 $\alpha<-1/\sqrt{3}<\beta<1/\sqrt{3}<\gamma$인 세 근을 갖는다.

(1-2)(a) (1-1)에서와 같이 구하고자 하는 방정식의 근을 $y=x^3-x$와 $y=t$의 교점으로 생각하자. $-2/\sqrt{3}^3 < t < 2/\sqrt{3}^3$인 경우 문항 (1-1)에서와 같이 사잇값 정리에 의해서 극대점과 극소점 사이에서 두 번째 근을 갖는다. 따라서 $-1/\sqrt{3} < \beta < 1/\sqrt{3}$. 그런데 $t=2/\sqrt{3^3}$, $t=-2/\sqrt{3^3}$인 경우, 각각 $x=-1/\sqrt{3}$, $x=1/\sqrt{3}$에서 중근을 가지므로 β의 값은 $-1/\sqrt{3} \le \beta \le 1/\sqrt{3}$을 만족한다. 나머지 t값의 경우 1개의 실근과 2개의 허근을 갖는다.

(1-2)(b) 제시문 (나)에서 주어진 근과 계수의 관계를 이용하면 다음을 얻을 수 있다. $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=t$, $\alpha^3-\alpha=t$, $\beta^3-\beta=t$, $\gamma^3-\gamma=t$. 이용하여 다음 정적분을 β에 관하여 풀면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
A &= \int_\alpha^\gamma |x^3-x-t|dx = \int_\alpha^\beta (x^3-x-t)dx - \int_\beta^\gamma (x^3-x-t)dx \\
&= \beta^4/2-\alpha^4/4-\gamma^4/4-\beta^2+\alpha^2/2+\gamma^2/2-t(2\beta-\alpha-\gamma) \\
&= \beta(\beta+t)/2-\alpha(\alpha+t)/4-\gamma(\gamma+t)/4-\beta^2+\alpha^2/2+\gamma^2/2-t(2\beta-\alpha-\gamma) \\
&= \alpha^2/4+\gamma^2/4-\beta^2/2-(t-t/4)(2\beta-\alpha-\gamma) \\
&= \frac{1}{4}(\beta^2-2\alpha\gamma)-\beta^2/2-\frac{3t}{4}(3\beta) \\
&= \frac{1}{4}(2-3\beta^2-9t\beta) = \frac{1}{4}(-9\beta^4+6\beta^2+2) = -\frac{9}{4}(\beta^2-\frac{1}{3})^2+\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

문항 (1-2)(a)에서 $-1/\sqrt{3} \le \beta \le 1/\sqrt{3}$ 이므로 기본적인 부등식의 연산을 이용하면 $0 \le \beta^2 \le 1/3$ 및 $0 \le (\beta^2-1/3)^2 \le 1/9$가 되어 넓이의 최솟값은 $\beta=0$일 때 $1/2$이다.

2021학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후
			□ 1번 ■ 2번(의예1번) □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	삼각함수의 극한, 적분과 미분의 관계, 부분적분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

가 성립한다.

(나) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(다) $\sin^2 x$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

(※) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는

$$\int_0^x (x^2 - t^2) f(t)dt = x\sin^2 x$$

를 만족한다.

(2-1) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, $\int_0^\pi x^2(F(x)-F(0))dx$의 값을 구하시오. (10점)

(2-2) $f(0)$의 값을 구하시오. (10점)

(2-3) 닫힌구간 $[0, 10]$에서 함수 $h(x) = \int_0^x (x^3 - t^3)f(t)dt$의 최솟값을 구하시오. (15점)

3. 출제 의도

정적분으로 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 알아보고, 삼각함수의 극한과 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="3">□ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"
□ 수학 □ 수학 Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td rowspan="8">관련 성취기준</td><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학Ⅱ)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ② 정적분
[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분)</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 2</td><td>[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분
[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(다)</td><td>성취기준3</td><td>[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 4</td><td>[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	125-130	(가)	
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2020	121-125	(가)	
미적분	홍성복 외	지학사	2020	67-72	(나)	
미적분	이준열 외	천재교육	2020	71-74	(나)	
미적분	홍성복 외	지학사	2020	61-66 139-143	(다)	재구성
미적분	이준열 외	천재교육	2020	65-68 139-146	(다)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(2-1) 정적분과 미분의 관계를 이용하여 주어진 함수가 만족하는 성질을 찾고 이를 부분적분법에 활용할 수 있는지를 묻는다.

(2-2) 삼각함수로 주어진 함수의 극한을 구할 수 있는지를 묻는다. (2-3) 도함수를 활용하여 그래프의 개형을 파악하고 최솟값을 구할 수 있는지를 알아본다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	- $x(F(x)-F(0))=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x\sin^2 x)$임을 보임.	4점
	- $\int_0^{\pi} x^2(F(x)-F(0))dx=-\frac{\pi^2}{8}$임을 보임.	6점
(2-2)	- $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{x}-\frac{\sin^2 x}{2x^2}+\cos^2 x-\sin^2 x$임을 보임.	6점
	- $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}$임을 보임.	4점
(2-3)	- $h'(x)=\frac{3}{2}x\sin x(\sin x+2x\cos x)$임을 보임.	3점
	- 함수 $h(x)$의 그래프의 개형을 그리고 $x=n\pi$일 때 극솟값을 가짐을 보임.	7점
	- 함수 $h(x)$가 최솟값 $h(3\pi)=-\frac{27}{8}\pi^2$을 가짐을 보임.	5점

7. 예시 답안

(2-1) 주어진 등식을 미분하면 $2x\int_0^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(x\sin^2 x)$이므로

$$x(F(x)-F(0))=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x\sin^2 x)$$

를 얻는다.

부분적분법과 제시문 (다)를 이용하면

$$\begin{aligned}\int x\sin^2 x\,dx &= x\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)-\int\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)dx\\ &=\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2(F(x)-F(0))dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\sin^2 x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}x\sin^2 x dx \\ &= -\int_0^{\pi}\frac{1}{2}x\sin^2 x dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{8}-\frac{x\sin 2x}{8}-\frac{\cos 2x}{16}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

이다.

(2-2) $x \neq 0$이면 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{\sin^2 x}{2x} + \sin x\cos x$이므로

$$f(x) = \frac{\sin x\cos x}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x^2} + \cos^2 x - \sin^2 x$$

이다. f는 연속이므로 $f(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x\cos x}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x^2} + \cos^2 x - \sin^2 x\right] = \frac{3}{2}$이다.

(2-3) $h'(x) = 3x^2\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{3}{2}x\frac{d}{dx}(x\sin^2 x) = \frac{3}{2}x\sin x(\sin x + 2x\cos x)$이다.

$h'(x)$는 $\sin x = 0$이거나 $\tan x = -2x$일 때 $h'(x)$의 부호가 바뀌고 극값을 갖는다. 곡선 $y = \tan x$와 직선 $y = -2x$을 그려보면 $0 < x < \pi$, $\pi < x < 2\pi$, $2\pi < x < 3\pi$일 때 각각 1개씩, 모두 3개의 교점을 갖는다.

그러므로 함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	a_1	$\cdots$	π	$\cdots$	a_2	$\cdots$	2π	$\cdots$	a_3	$\cdots$	3π	$\cdots$	10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

(2-1)과 같은 방법으로

$$\begin{aligned}h(n\pi) = \int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\frac{d}{dx}(x\sin^2 x)dx &= \left[\frac{3}{2}x^2\sin^2 x\right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\sin^2 x dx \\ &= -\int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\sin^2 x dx \\ &= -\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}\right]_0^{n\pi} = -\frac{3n^2\pi^2}{8}\end{aligned}$$

이므로, $h(x)$는 구간 $[0,10]$에서 최솟값 $h(3\pi) = -\dfrac{27}{8}\pi^2$을 가진다.

2021학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 오전 □ 오후 □ 1번 □ 2번 ■ 3번 (의예2번)
출제 범위	핵심개념 및 용어	코사인법칙, 중복조합, 연속함수	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 임의의 세 점 A, B, C에 대하여, 부등식 $\overline{AB}+\overline{BC} \geq \overline{AC}$가 성립한다.
역으로, 좌표평면 위에 임의의 두 점 A, B가 있고, 임의의 두 양수 p, q가 부등식

$$|p-q| \leq \overline{AB} \leq p+q$$

를 만족하면, $\overline{AC}=p$, $\overline{BC}=q$인 점 C가 좌표평면 위에 존재한다.

(나) (코사인법칙) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하면, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립한다.

(3-1) 좌표평면에서 $\overline{OP_1}=10$, $\overline{P_1P_2}=20$인 점 P_1이 존재하는 점 P_2의 집합을 S라고 할 때, 도형 S의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) (5점)

(3-2) 좌표평면에서 $\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2P_3}=a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재하는 점 P_3의 집합이 $\{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수를 구하시오. (10점)

(3-3) 자연수 a_1, a_2, a_3과 실수 θ $(0 \leq \theta < \pi)$에 대하여 다음 조건을 만족하는 좌표평면 위의 점 P_3의 집합을 T_θ라고 하자.

$\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2P_3}=a_3$이고 $\theta \leq \angle OP_1P_2 \leq \pi$와 $\theta \leq \angle P_1P_2P_3 \leq \pi$를 만족하는 두 점 P_1, P_2가 존재한다.

(3-2)의 자연수 a_1, a_2, a_3에 대하여, 집합 T_θ가 집합 $\{P \mid \overline{OP} \le 9\}$와 같아지도록 하는 θ의 값의 범위는 $0 \le \theta \le \alpha$이다.

(a) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4$일 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

(b) α가 최대가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3의 값을 찾고, 이때의 $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

삼각형의 세 변의 길이와 제시문 (가)에서 주어진 부등식과의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 좌표평면 위의 점의 집합에 관한 문제를 해결 할 수 있는지 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"** ☐ 수학 ■ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 미적분 ☐ 확률과 통계		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학Ⅰ)
	(나)	성취기준 1	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학I	박교식 외	동아출판	2018	90	나	
수학I	권오남 외	교학사	2018	101	나	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

(3-1) 좌표평면 위의 점이 그리는 도형의 방정식을 구하는 문제이다. 제시문 (가)에서 주어진 부등식을 이용하여 원점으로부터 구하려는 점의 거리에 대한 조건을 구할 수 있다.

(3-2) (3-3) 문제의 조건을 만족하는 점 P_3가 주어졌을 때, 원점 O를 중심으로 P_3를 회전시킨 모든 점도 조건을 만족한다. 또한 P와 Q가 집합의 원소라면 O로부터의 거리가 $\overline{OP}$와 $\overline{OQ}$ 사이에 있는 점도 집합의 원소가 된다는 관찰로 부터 주어진 조건을 만족하기 위한 가장 중요한 조건이 O가 집합의 원소가 된다는 사실을 알 수 있다. 이러한 사고의 방식은 연속함수의 개념을 잘 이해하고 있는지를 평가하는 좋은 척도가 된다고 본다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$S=\{P \mid 10 \le \overline{OP} \le 30\}$임을 보이면	3
	S의 넓이가 800π임을 보이면	2
(3-2)	$a_1+a_2+a_3=9$을 보이면	2
	$\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2O}=a_3$가 되는 P_1, P_2가 존재하는 순서쌍 (a_1,a_2,a_3)이 만족하는 필요충분조건을 정확하게 찾아내면 (조건이 필요충분하다는 것을 예시답안처럼 엄밀하게 증명할 필요는 없으나 연속에 관한 아이디어가 들어가 있어야 함.)	5
	조건을 만족하는 순서쌍 (a_1,a_2,a_3)의 개수가 10개임을 구하면	3
(3-3) (a)	$\overline{OP_1}=2$, $\overline{P_1P_2}=3$, $\overline{P_2O}=4$인 삼각형에서 α가 $\angle P_1$와 $\angle P_2$ 중 작은 것과 같다는 것을 보이면	7
	$\cos\alpha=\dfrac{7}{8}$임을 구하면	3
(3-3) (b)	(a_1,a_2,a_3)이 $(4,1,4)$일 때 α가 최대임을 보이면	7
	$\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$을 보이면	3

7. 예시 답안

(3-1) 제시문 (가)에 의해 $\overline{OP_2} \le \overline{OP_1}+\overline{P_2P_2}=30$, $\overline{OP_2} \ge \overline{P_2P_2}-\overline{OP_1}=10$이고, 실제로 $10 \le \overline{OP_2} \le 30$인 좌표평면의 점 P_2에 대하여 제시문 (가)에 의하여 $\overline{OP_1}=10, \overline{P_1P_2}=20$인 P_1이 존재한다. 따라서 주어진 집합은 $\{P \mid 10 \le \overline{OP} \le 30\}$과 같고, 넓이는 800π이다.

(3-2) 조건을 만족하는 점 P_3의 집합을 T라고 하자. 제시문 (가)에 의해
$\overline{OP_3} \leq \overline{OP_2} + \overline{P_2P_3} \leq (\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2}) + \overline{P_2P_3} \leq a_1 + a_2 + a_3$
이다. $\overline{OP_3}$의 최댓값은 O, P_1, P_2, P_3가 직선위에 이 순서대로 놓여있을 때이고,
이때 $\overline{OP_3} = a_1 + a_2 + a_3 = 9$를 만족하므로 조건을 만족할 때 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$이여야 한다.

(a) $P \in T$이고 $\overline{OA} = \overline{OP}$라고 가정하자. 그러면 점 A는 점 P를 원점을 중심으로 회전해서 얻어진다. 이때 $\overline{OP_1} = a_1$, $\overline{P_1P_2} = a_2$, $\overline{P_2P} = a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재하는데 같은 회전에 의해서 P_1, P_2가 옮겨진 점을 각각 A_1, A_2라고 하면, $\overline{OA_1} = a_1$, $\overline{A_1A_2} = a_2$, $\overline{A_2A} = a_3$이므로 $A \in T$이다.
(b) $P \in T$이고 $\overline{OP} < r < a_1 + a_2 + a_3$라고 가정하자. 정의에 의하여 $\overline{OP_1} = a_1$, $\overline{P_1P_2} = a_2$, $\overline{P_2P_3} = a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재하며, $\angle OP_1P_2 = \alpha_1$, $\angle P_1P_2P_3 = \alpha_2$라고 하자.
$\alpha_1 \leq \theta \leq \pi$인 임의의 실수 θ에 대하여 $\overline{P_1P_2{}'} = a_2$, $\overline{P_2{}'P_3{}'} = a_3$, $\angle OP_1P_2{}' = \theta$, $\angle P_1P_2{}'P_3{}' = \alpha_2$인 점 $P_2{}'$, $P_3{}'$를 잡아서 $f(\theta) = \overline{OP_3{}'}$라고 정의하자. 마찬가지로,
$\alpha_2 \leq \theta \leq \pi$인 임의의 실수 θ에 대하여 $\overline{P_1P_2{}'} = a_2$, $\overline{P_2{}'P_3{}'} = a_3$, $\angle OP_1P_2{}' = \pi$, $\angle P_1P_2{}'P_3{}' = \theta$인 점 $P_2{}'$, $P_3{}'$를 잡아서 $f(\theta) = \overline{OP_3{}'}$라고 정의하자. 그러면 $f(\alpha_1) = \overline{OP}$, $f(\pi) = g(\alpha_2)$, $g(\pi) = a_1 + a_2 + a_3$이고 $f(\theta)$와 $g(\theta)$는 연속함수이므로 사잇값 정리에 의하여 $g(t) = r$인 t $(\alpha_1 < t \leq \pi)$ 또는 $g(t) = r$인 t $(\alpha_2 \leq t < \pi)$가 존재한다. 따라서 $\overline{OP_3{}'} = r$인 어떤 점 $P_3{}'$이 집합 T의 원소이다.

(a), (b)에 의하여 $T = \{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$일 필요충분조건은 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$이고 $O \in T$인 것이다.
$O \in T$이려면 $\overline{OP_1} = a_1$, $\overline{P_1P_2} = a_2$, $\overline{OP_2} = a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재해야하며 이는 세 자연수 a_1, a_2, a_3 중에 가장 큰 것 a가 다른 두 자연수의 합 $9 - a$보다 작거나 같을 때이다. 따라서 자연수 a_1, a_2, a_3가 조건을 만족하려면, $a_1 + a_2 + a_3 = 9$이고, $a_1, a_2, a_3 \leq 4$이어야 한다.

순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수를 세기위해, a_1, a_2, a_3중 하나가 5 이상인 것을 빼주면
${}_3H_6 - 3 \times {}_2H_0 - 3 \times {}_2H_1 - 3 \times {}_2H_2 = {}_8C_2 - 3 \times {}_1C_1 - 3 \times {}_2C_1 - 3 \times {}_3C_1 = 10$
개다. (또는 중복조합을 쓰지 않고 순서쌍의 개수를 모두 세어도 된다.)

(3-3) 문제 (3-2)의 조건을 만족하는 세 자연수 a_1, a_2, a_3에 대하여, $T_\theta = \{P \mid \overline{OP} \leq 9\}$일 필요충분조건은 $O \in T_\theta$인 것이다. 따라서 $\overline{OP_1} = a_1$, $\overline{P_1P_2} = a_2$, $\overline{OP_2} = a_3$인 삼각형 OP_1P_2의 두 각 $\angle P_1$, $\angle P_2$중에 작은 값이 α가 된다.
(a) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_4 = 4$이므로 $\angle P_2 < \angle P_1$이다. 따라서 코사인법칙에 의해
$\alpha = \angle P_2 = \dfrac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \dfrac{7}{8}$이다.
(b) α가 최대인 경우는 $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 4$인 경우이고 $\cos\alpha = \dfrac{4^2 + 1^2 - 4^2}{2 \times 4 \times 1} = \dfrac{1}{8}$이다.

2021학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 해설 - 자연계열

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■오전(의예) □ 오후 □ 1번 □ 2번 ■ 의예3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	집합, 수학적 귀납법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(수학적 귀납법) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$ $(k \geq 1)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 자연수 m에 대하여 ($4m+1$개의 원소로 이루어진) 집합

$$X=\{-2m, -2m+1, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, 2m-1, 2m\}$$

의 어떤 부분집합 A가 다음 조건을 만족한다.

A의 어떠한 원소 a, b, c에 대하여도 $a+b+c \neq 0$이다. 단, a, b, c가 서로 다를 필요는 없다.

예를 들어, 0은 A의 원소가 될 수 없다. 왜냐하면 $0+0+0=0$이기 때문이다.

(3-1) (a) $-2m \in A$인 경우, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$에 대하여 i와 $2m-i$ 중 하나는 A의 원소가 될 수 없음을 보이시오. (5점)

(b) $-2m \in A$이고 $2m \in A$인 경우, $n(A) \leq 2m$임을 보이시오. (5점)

(3-2) 수학적 귀납법을 이용하여 $n(A) \leq 2m$임을 증명하시오. (15점)

(3-3) 각 자연수 m에 대하여, 위의 조건을 만족하고 $n(A)=2m$이고 $-2m \notin A$, $2m \notin A$인 집합 A를 하나 찾으시오. (5점)

3. 출제 의도

이 문제는 주어진 지문의 상황과 질문의 내용을 잘 이해하고 수학적 귀납법을 이해하고 활용할 수 있는 학생들은 어렵지 않기 해결할 수 있는 문제이다. 어려운 수학적 계산을 잘 하거나 함수 문제를 잘 푸는 학생들 중에도 가끔 아주 단순한 논리적 사고와 서술에는 약한 학생들이 많다. 논리적이고 합리적인 사고 능력을 키우고자 하는 것이 수학교육의 주요 목표이기 때문에 본 문제는 그러한 목표 추구에 부합하고자 만든 문제이다. 학교 교육 현장에서도 계산 중심의 수학 외에도 논리적 사고와 서술에 대한 교육이 중요하다는 인식이 확대되기를 기대한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
☐ 수학 ■ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 미적분 ☐ 확률과 통계</td></tr>
<tr><td rowspan="2">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학Ⅰ)</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학Ⅰ] - (3)수열 - 3 수학적 귀납법
[12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학1	류희찬 등	천재교과서	2017	153	(수학적 귀납법)	없음
수학1	권오남 등	교학사	2017	155	(수학적 귀납법)	없음

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 해당사항 없음

5. 문항 해설

이 문제에서 물어 보는 내용이 무엇인지를 이해할 수 있고 수학적 귀납법을 이해하고 활용할 수 있는 학생들은 어렵지 않기 해결할 수 있는 문제이다.

(3-1) i와 $2m-i$가 둘 다 A에 속하면 $i+(2m-i)+(-2m)=0$이 되어 주어진 조건에 위배된다는

단순한 관찰을 할 수 있는지를 묻는 문제이다. 음수에서도 대칭적으로 성립한다.

(3-2) 경우를 (3-1)의 (b)의 경우 외에도 $-2m \in A,\ 2m \notin A$인 경우에 대하여도 수학적 귀납법을 이용하여 문제를 증명할 수 있는지, 그리고 나머지 경우들에도 같은 논리로 증명할 수 있는지를 묻고 있다. 이 문항은 우선, 경우를 4가지 경우로 나누어 따지고자 하는 것, 그리고 그 중에서도 특히 $-2k-2 \in A,\ 2k+2 \notin A$인 경우에 대하여 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명하는 것이 핵심이 된다.

(3-3) 주어진 조건을 만족하면서 $n(A)=2m$인 집합 A의 실례를 찾는 문제이다. 이 문제 해결의 결과를 통하여 우리는 두 가지 사실을 알 수 있다. 첫째, 짝수 $2m$에 대하여 조건을 만족하는 집합 $n(A)$은 $2m$ 이하라는 것을 (3-2)에서 보였는데, 최댓값 $2m$을 갖는 예가 실제로 존재한다는 사실, 그리고 둘째는 짝수일 때만이 아니라 홀수 $2m-1$인 경우에도 조건을 만족하는 집합 $n(A)$의 최댓값을 구할 수 있다는 것이고 그 값은 $2m$라는 사실이다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	(a) 간단한 논리이므로 합리적인 설명이 있으면	5점
	(b) 간단한 논리이므로 합리적인 설명이 있으면	5점
(3-2)	경우를 (3-1)의 (b)의 경우 외의 3가지로 나누면	3점
	$-2k-2 \in A,\ 2k+2 \notin A$ 또는 $-2k-2 \notin A,\ 2k+2 \in A$ 경우에 증명하면	7점
	나머지 경우에 대하여 증명을 마치면	5점
(3-3)	올바를 예를 하나 찾아 서술하기만 하면	5점

7. 예시 답안

(3-1) (a) i와 $2m-i$가 둘 다 A의 원소라면 $-2m \in A$라는 가정으로부터 $i+(2m-i)+(-2m)=0$이 되어 조건에 위배된다. 따라서 둘 다 A의 원소일 수는 없다.

(b) $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$에 대하여 $-i$와 $-2m+i$도 동시에 A에 속할 수 없으므로($\because$ $2m \in A$) 모두 $2m$개의 각 쌍에서 숫자 하나씩은 A의 원소가 될 수 없다. 0도 빠지므로 A의 원소는 많아야 $(4m+1)-(2m+1)=2m$개다.

(3-2) 우선, $m=1$일 때는 A가 $\{-2, -1, 1, 2\}$ 중 3개의 원소를 포함한다면 주어진 조건을

만족하지 않으므로 A의 원소는 2개 이하여야 한다. 이제, 수학적 귀납법에 따라 $m=k$일 때 성립한다고 가정하고 $k+1$일 때 성립함을 보이자. $-2k-2$, $2k+2 \in A$인 경우는 3-1 (b)에서 증명하였다. 이제 다음과 같은 3가지 경우를 따져 보자.

(i) $-2k-2 \in A$, $2k+2 \notin A$인 경우.

(i)-1: $2k+1 \notin A$이면, 집합 $A \cap \{-2k, -2k+1, \ldots, 2k-1, 2k\}$은 수학적 귀납법의 가정에 의해 $2k$개 이하의 원소를 갖는다. 따라서 A는 더 가질 수 있는 원소가 $-2k-2, -2k-1$ 뿐이므로 $2k+2$개 이하의 원소를 갖는다.

(i)-2: $2k+1 \in A$이면, 앞의 (3-1)과 같은 논법에 의해

◆ $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$에 대하여 i, $2(k+1)-i$ 중 하나는 A에 속하지 않으므로($\because$ $-2k-2 \in A$) $2(k+1)$개의 양의 정수 중 $k+1$개가 빠지고 또한 $2k+2 \notin A$이므로, 모두 $k+2$개가 빠진다. 따라서 양의 정수 중에서는 k개 이하가 A에 속한다.

◆ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$에 대하여 $-i$, $(-2k+1)+i$ 중 하나는 A에 속하지 않으므로($\because$ $2k+1 \in A$), 음의 정수 중에서 k개가 빠지므로 음의 정수는 $k+2$개 이하가 A에 속한다.

따라서 $n(A) \leq k+(k+2) = 2(k+1)$이다.

(ii) $-2k-2 \notin A, 2k+2 \in A$인 경우는 (ii)과 대칭적인 이유로 성립한다.

(iii) $-2k-2 \notin A, 2k+2 \notin A$, 인 경우, 앞의 (i)-1과 동일한 수학적 귀납법에 의해 $n(A) \leq 2k+2$이다.

(3-3) 모든 홀수들의 집합은 $2m$개의 원소로 이루어져 있고, 주어진 조건을 만족한다. 왜냐하면 세 홀수의 합이 0이 될 수는 없기 때문이다. 또 다른 예로는

$$A = \{-2m+1, 2m+2, \ldots, -m+1\} \cup \{m-1, m, m+1, \ldots, 2m-1\}$$

가 있다.