2021학년도 수시모집

논술고사 문제지(오전)

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자
수험번호		성　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).
5. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.
6. **본인이 지원한 모집단위에 해당하는 문항을 선택하여 답안을 작성하시오.**
   (다른 모집단위 문항의 답안을 작성하면 0점 처리 됩니다.)

※ **답안지는 절대 교체할 수 없습니다.**

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식과 그림을 사용할 수 있습니다.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

[자연계열 - 일반]

(의예과 제외)

☞ 의예과는 4쪽부터 푸시오.

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 계수가 실수인 삼차다항식 x^3+ax^2+bx+c가 실수 α, β, γ에 대하여 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 인수분해 되는 경우, 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$은 세 실근 α, β, γ를 갖는다고 한다.
(단, α, β, γ의 값이 서로 다를 필요는 없다.)

(나) 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$이 세 실근 α, β, γ를 가지면, 등식

$$\begin{aligned} &x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

가 성립하므로 근과 계수 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\alpha+\beta+\gamma=-a, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b, \quad \alpha\beta\gamma=-c$$

(1-1) 삼차방정식 $x^3-x-t=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 t의 값의 범위를 구하시오. (8점)

(1-2) 삼차방정식 $x^3-x-t=0$이 세 실근 α, β, γ $(\alpha \le \beta \le \gamma)$를 갖는다.

(a) 실근 β의 값의 범위를 구하시오. (5점)

(b) 곡선 $y=x^3-x-t$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 β로 나타내고, S의 최솟값을 구하시오. (17점)

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

가 성립한다.

(나) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(다) $\sin^2 x$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

(※) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는

$$\int_0^x (x^2 - t^2) f(t)dt = x\sin^2 x$$

를 만족한다.

(2-1) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, $\int_0^\pi x^2(F(x) - F(0))dx$의 값을 구하시오. (10점)

(2-2) $f(0)$의 값을 구하시오. (10점)

(2-3) 닫힌구간 $[0, 10]$에서 함수 $h(x) = \int_0^x (x^3 - t^3) f(t)dt$의 최솟값을 구하시오. (15점)

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 임의의 세 점 A, B, C에 대하여, 부등식 $\overline{AB}+\overline{BC} \geq \overline{AC}$가 성립한다.
역으로, 좌표평면 위에 임의의 두 점 A, B가 있고, 임의의 두 양수 p, q가 부등식

$$|p-q| \leq \overline{AB} \leq p+q$$

를 만족하면, $\overline{AC}=p$, $\overline{BC}=q$인 점 C가 좌표평면 위에 존재한다.

(나) [코사인 법칙] 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하면,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

가 성립한다.

(3-1) 좌표평면에서 $\overline{OP_1}=10$, $\overline{P_1P_2}=20$인 점 P_1이 존재하는 점 P_2의 집합을 S라고 할 때, 도형 S의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) (5점)

(3-2) 좌표평면에서 $\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2P_3}=a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재하는 점 P_3의 집합이 $\left\{P \mid \overline{OP} \leq 9\right\}$가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수를 구하시오. (10점)

(3-3) 자연수 a_1, a_2, a_3과 실수 $\theta\,(0 \leq \theta < \pi)$에 대하여 다음 조건을 만족하는 좌표평면 위의 점 P_3의 집합을 T_θ라고 하자.

> $\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2P_3}=a_3$이고 $\theta \leq \angle OP_1P_2 \leq \pi$와 $\theta \leq \angle P_1P_2P_3 \leq \pi$를 만족하는 두 점 P_1, P_2가 존재한다.

(3-2)의 자연수 a_1, a_2, a_3에 대하여, 집합 T_θ가 집합 $\left\{P \mid \overline{OP} \leq 9\right\}$와 같아지도록 하는 θ의 값의 범위는 $0 \leq \theta \leq \alpha$이다.

(a) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$일 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

(b) α가 최대가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3의 값을 찾고, 이때의 $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

[자연계열 - 의예과]

[문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

가 성립한다.

(나) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(다) $\sin^2 x$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \quad (C\text{는 적분상수})$$

(※) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는

$$\int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt = x\sin^2 x$$

를 만족한다.

(1-1) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, $\int_0^\pi x^2(F(x) - F(0))dx$의 값을 구하시오. (10점)

(1-2) $f(0)$의 값을 구하시오. (10점)

(1-3) 닫힌구간 $[0, 10]$에서 함수 $h(x) = \int_0^x (x^3 - t^3)f(t)dt$의 최솟값을 구하시오. (15점)

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 임의의 세 점 A, B, C에 대하여, 부등식 $\overline{AB}+\overline{BC} \geq \overline{AC}$가 성립한다.
역으로, 좌표평면 위에 임의의 두 점 A, B가 있고, 임의의 두 양수 p, q가 부등식

$$|p-q| \leq \overline{AB} \leq p+q$$

를 만족하면, $\overline{AC}=p$, $\overline{BC}=q$인 점 C가 좌표평면 위에 존재한다.

(나) [코사인 법칙] 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하면,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

가 성립한다.

(2-1) 좌표평면에서 $\overline{OP_1}=10$, $\overline{P_1P_2}=20$인 점 P_1이 존재하는 점 P_2의 집합을 S라고 할 때, 도형 S의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) (5점)

(2-2) 좌표평면에서 $\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2P_3}=a_3$인 두 점 P_1, P_2가 존재하는 점 P_3의 집합이 $\{P\,|\,\overline{OP}\leq 9\}$가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수를 구하시오. (10점)

(2-3) 자연수 a_1, a_2, a_3과 실수 $\theta\ (0\leq\theta<\pi)$에 대하여 다음 조건을 만족하는 좌표평면 위의 점 P_3의 집합을 T_θ라고 하자.

> $\overline{OP_1}=a_1$, $\overline{P_1P_2}=a_2$, $\overline{P_2P_3}=a_3$이고 $\theta\leq\angle OP_1P_2\leq\pi$와 $\theta\leq\angle P_1P_2P_3\leq\pi$를 만족하는 두 점 P_1, P_2가 존재한다.

(2-2)의 자연수 a_1, a_2, a_3에 대하여, 집합 T_θ가 집합 $\{P\,|\,\overline{OP}\leq 9\}$와 같아지도록 하는 θ의 값의 범위는 $0\leq\theta\leq\alpha$이다.

(a) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$일 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

(b) α가 최대가 되도록 하는 자연수 a_1, a_2, a_3의 값을 찾고, 이때의 $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> [수학적 귀납법] 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
>
> (1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
>
> (2) $n=k$ $(k \geq 1)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 자연수 m에 대하여 ($4m+1$개의 원소로 이루어진) 집합

$$X=\{-2m,-2m+1,\cdots,-1,0,1,2,\cdots,2m-1,2m\}$$

의 어떤 부분집합 A가 다음 조건을 만족한다.

> A의 어떠한 원소 a,b,c에 대하여도 $a+b+c \neq 0$이다. 단, a, b, c가 서로 다를 필요는 없다.

예를 들어, 0은 A의 원소가 될 수 없다. 왜냐하면 $0+0+0=0$이기 때문이다.

(3-1) (a) $-2m \in A$인 경우, $1 \leq i \leq m$인 자연수 i에 대하여 i와 $2m-i$ 중 하나는 A의 원소가 될 수 없음을 보이시오. (5점)

(b) $-2m \in A$이고 $2m \in A$인 경우, $n(A) \leq 2m$임을 보이시오. (5점)

(3-2) 수학적 귀납법을 이용하여 $n(A) \leq 2m$임을 증명하시오. (15점)

(3-3) 각 자연수 m에 대하여, 위의 조건을 만족하고 $n(A)=2m$이고 $-2m \notin A$, $2m \notin A$인 집합 A를 하나 찾으시오. (5점)

<연 습 장>

<연 습 장>