문항카드 5. 논술전형 자연 T1

1 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명	논술전형 논술고사
해당 대학의 계열(과목) 및 문항번호	토요일 T1-자연계
출제 범위	2015개정 교육과정 수학Ⅰ, 수학Ⅱ
예상 소요 시간	90분

2 문항 및 문항해설

문항번호	논술고사 자연계 1번	과목명	수학Ⅰ
내용영역	삼각함수	행동영역	계산능력, 이해능력
정답	π	배점	9점
관련 성취기준	[12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.		
문항	모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-(4\cos\theta)x+1\geq 0$ 이 성립하도록 하는 θ의 값의 범위가 $\alpha\leq\theta\leq\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (단, $0\leq\theta\leq\pi$)		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학I	고성은 외	좋은책신사고	2021	90	문항	O

문항 해설

(i) 모든 실수 x에 대해 부등식 $x^2-(4\cos\theta)x+1\geq 0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-(4\cos\theta)x+1=0$의 판별식 D가 $D\leq 0$를 만족해야 한다. (3점)

(ii) 즉, $D=16\cos^2\theta-4\leq 0$이어야 하고, 이로부터

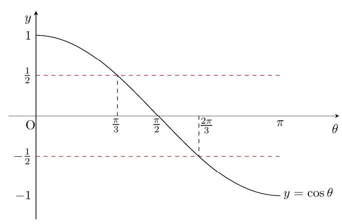
$$-\frac{1}{2}\leq\cos\theta\leq\frac{1}{2}\qquad\text{------}\quad(1)$$

를 얻는다. (3점)

(iii) $0\leq\theta\leq\pi$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프를 고려해 볼 때,

부등식 (1)이 성립하는 θ의 범위는 $\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{2\pi}{3}$이다.

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{2\pi}{3}$이고, $\alpha+\beta=\pi$이다. (3점)



단계	채점 기준	배점
도입	문제의 이차부등식이 성립할 조건은 판별식 D가 $D \le 0$라는 것을 파악한다.	3점
전개	$D=16\cos^2\theta-4 \le 0$로부터 $-\frac{1}{2} \le \cos\theta \le \frac{1}{2}$를 얻는다.	3점
결론	$\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$임을 언급하고, $\alpha+\beta=\pi$라는 결론을 내린다.	3점

채점 유의 사항	
	1. 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 그리지 않아도 된다.
	2. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	4. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 2번	과목명	수학Ⅱ
내용영역	함수의 극한과 연속, 미분	행동영역	계산능력, 이해능력
정답	28	배점	9점
관련 성취기준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.		
문항	다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하시오. (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^3+5x+1}=1$ (나) $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=2$		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021	20	제시문	O

문항 해설

(i) 조건 (가)에 의해

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c \text{ (단, } a,b,c\text{는 상수)} \quad \text{------ (1)}$$

이다. (2점)

(ii) 조건 (나)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로,

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=0$$

이어야 한다. 따라서 $f'(0)=0$이고, (1)에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$이므로 $b=0$이다. (3점)

(iii) $f'(x)=6x^2+2ax$를 조건 (나)에 대입하면

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(6x+2a)=2a$$

이고, $a=1$을 얻는다. (3점)

(iv) $f'(x)=6x^2+2x$이므로 $f'(2)=28$이다. (1점)

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (가)로부터 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$를 얻는다.	2점
전개	조건 (나)로부터 $f'(0)=0$임을 파악해서 $b=0$을 찾는다. $f'(x)=6x^2+2ax$를 조건 (나)에 대입해서 $a=1$을 얻는다.	6점
결론	$f'(x)=6x^2+2x$로부터 $f'(2)=28$을 계산한다.	1점

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	3. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 3번	과목명	수학Ⅱ
내용영역	미분	행동영역	문제해결력
정답	$\frac{153}{2}$	배점	9점
관련 성취기준	[12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.		
문항	좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(0,3)$과 곡선 $y=\frac{x^2}{4}$ $(-1\le x\le 3)$ 위의 점 Q에 대해 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라고 하자. 이 때, $a^2\times b^2$의 값을 구하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅱ	배종숙 외	금성출판사	2022	87	제시문	O

문항 해설

(i) 점 $\mathrm{P}(0,3)$과 곡선 위의 점 $\mathrm{Q}\left(x,\frac{x^2}{4}\right)$ (단, $-1\le x\le 3$)에 대해 $f(x)=\overline{\mathrm{PQ}}^2$이라고 하면

$$f(x)=(x-0)^2+\left(\frac{x^2}{4}-3\right)^2=\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{2}+9 \qquad (1점)$$

이다.

(ii) $f(x)$를 x에 대해 미분하면 $f'(x)=\frac{x^3}{4}-x=\frac{x}{4}(x-2)(x+2)$이고, $-1<x<3$에서 $f'(x)=0$인 x는 $0,\ 2$이다. (3점)

(iii) 따라서 $-1\le x\le 3$의 범위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 다음 값들 중에서 찾으면 된다.

$$f(-1)=\frac{137}{16},\ f(0)=9,\ f(2)=8,\ f(3)=\frac{153}{16}$$

즉, $f(x)$의 최댓값은 $\frac{153}{16}$이고, 최솟값은 8이다. (3점)

(iv) $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{f(x)}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값 a와 최솟값 b는 $a^2=\frac{153}{16}$, $b^2=8$를 만족한다. 결국

$$a^2\times b^2=\frac{153}{16}\times 8=\frac{153}{2} \quad (2점)\ 이다.$$

단계	채점 기준	배점
도입	점 $Q\left(x, \frac{x^2}{4}\right)$에 대해 함수 $f(x)=\overline{PQ}^2$의 식을 쓰고, $f'(x)=0$인 x를 찾는다.	4점
전개	$f'(x)=0$인 x와 끝점에서의 함숫값을 계산해서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 찾는다.	3점
결론	$a^2 \times b^2 = \frac{153}{2}$을 계산한다.	2점

채점 유의 사항	1. 수학 II의 범위를 벗어난 합성함수의 미분 또는 제곱근의 미분을 하더라도 풀이로 인정한다.
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	3. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 4번	과목명	수학II
내용영역	미분, 적분	행동영역	계산능력, 이해능력
정답	10	배점	9점
관련 성취기준	[12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.		
문항	다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (가) $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. (나) $f(0)=8$ (다) 모든 실수 x에서 연속인 어떤 함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=3+\int_1^x (x-2+t)g(t)dt$ 이다.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학II	권오남 외	교학사	2021	155	문항	O

문항 해설

(i) 조건 (가)에 의해 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)이고, 조건 (나)에 의해 $8=f(0)=c$이다.
따라서

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+8 \quad \text{------ (1)}$$

이다. (1점)

(ii) 조건 (다)의 식에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=3$이 되고, (1)로부터

$$1+a+b+8=3 \quad \text{------ (2)}$$

을 얻는다. (2점)

(iii) 조건 (다)의 식을 $f(x)=3+(x-2)\int_1^x g(t)dt+\int_1^x tg(t)dt$으로 정리하고, 양변을 x에 대해 미분하면

$$f'(x)=\int_1^x g(t)dt+(x-2)g(x)+xg(x)=\int_1^x g(t)dt+2(x-1)g(x)$$

가 된다. 여기에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=0$이 되고, (1)로부터 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

문항 해설
$3+2a+b=0$ ------ (3)   을 얻는다. (4점)   (iv) (2)와 (3)을 연립하면 $a=3,\ b=-9$를 찾고, $f(x)=x^3+3x^2-9x+8$이 된다. 따라서 $f(2)=10$이다. (2점)

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (가)와 (나)로부터 $f(x)=x^3+ax^2+bx+8$을 얻는다.	1점
전개	조건 (다)의 식으로부터 $f(1)=3$을 얻고, 이로부터 $1+a+b+8=3$을 찾는다. 또한, 조건 (다)의 식을 미분해서 $f'(1)=0$을 얻고, 이로부터 $3+2a+b=0$를 찾는다.	6점
결론	a와 b에 대한 두 식을 연립하여 $a=3,\ b=-9$를 구하고, $f(2)=10$을 계산한다.	2점

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	3. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 5번	과목명	수학 I
내용영역	지수함수와 로그함수	행동영역	문제해결력, 추론능력
정답	22	배점	10점
관련 성취기준	[12수학 I 01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. [12수학 I 01-02] 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다. [12수학 I 01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.		
문항	다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. 어떤 실수 r에 대해 $4^r-2^{r+\frac{10}{n}}=-1$이고, 4^r+4^{-r}은 자연수이다.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학 I	박교식 외	동아출판	2021	17	제시문	O

문항 해설
(i) 자연수 n이 문제의 조건을 만족시킨다고 하자. 식 $4^r-2^{r+\frac{10}{n}}=-1$의 양변에 2^{-r}을 곱해서 $2^r+2^{-r}=2^{\frac{10}{n}}$ 을 얻는다. 또한, 양변을 제곱해서 $4^r+4^{-r}=2^{\frac{20}{n}}-2$ ------ (1)   를 얻는다. (4점)   (ii) 문제의 조건에서 4^r+4^{-r}은 자연수이므로 (1)에 의해 $2^{\frac{20}{n}}-2$는 자연수이다. 숫자 2는 어떤 자연수의 거듭제곱수가

문항 해설
아니므로 $2^{\frac{20}{n}}-2$이 자연수라는 것은 n이 20의 약수이고 $2^{\frac{20}{n}}>2$라는 것이다. 가능한 n은 1, 2, 4, 5, 10이다. (4점) (iii) 자연수 n이 1, 2, 4, 5 또는 10일 때, $2^{\frac{10}{n}} \ge 2^{\frac{10}{10}}=2$이다. 식 $4^r-2^{r+\frac{10}{n}}=-1$에 $X=2^r$를 대입하여 방정식 $X^2-2^{\frac{10}{n}}X+1=0$ 를 얻는다. 여기에서 $2^{\frac{10}{n}} \ge 2$이므로 판별식 D가 $D \ge 0$을 만족하여 방정식은 실근 X를 가지고, 근과 계수의 관계에 의해 $X>0$이다. 지수함수 $f(x)=2^x$의 치역이 양의 실수 전체집합이므로 $X=2^r$를 만족하는 실수 r이 존재하고 $4^r-2^{r+\frac{10}{n}}=-1$를 만족한다. (1점) (iv) 결국 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n은 정확히 1, 2, 4, 5, 10이고, 이 값들을 더하면 22이다. (1점)

단계	채점 기준	배점
도입	자연수 n이 문제의 조건을 만족할 때 식 $4^r-2^{r+\frac{10}{n}}=-1$을 변형하여 $4^r+4^{-r}=2^{\frac{20}{n}}-2$를 얻는다.	4점
전개	$2^{\frac{20}{n}}-2$가 자연수가 될 n은 1, 2, 4, 5, 10임을 찾는다. 역으로, n이 1, 2, 4, 5 또는 10일 때 문제의 조건을 만족시킨다는 것을 언급한다.	5점
결론	문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은 22임을 계산한다.	1점

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	3. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 6번	과목명	수학 I
내용영역	지수함수와 로그함수	행동영역	이해능력, 문제해결력
정답	30	배점	10점
관련 성취기준	[12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학 I 01-05] 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.		
문항	두 양수 a와 b가 다음 조건을 모두 만족시킨다. (가) $\log a=m+\alpha$ (단, m은 정수, $0 \le \alpha < 1$) (나) $\log b=n+\beta$ (단, n 은 정수, $0 \le \beta < 1$) (다) 점 $\mathrm{P}(m,n)$과 점 $\mathrm{Q}(\alpha,\beta)$는 모두 제1사분면의 점이다. (라) 점 P는 곡선 $y=\frac{18}{x}$ 위에 있다. (마) 점 Q는 직선 $y=-x+1$ 위에 있다. $a\times b$의 최댓값과 최솟값의 곱이 10^k일 때, k의 값을 구하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학 I	권오남 외	교학사	2021	30	제시문	O

문항 해설
(i) 조건 (가), (나), (다)에서 m과 n은 자연수이고, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$이다. (1점) (ii) 조건 (라)로부터 $n=\frac{18}{m}$, 즉 $mn=18$을 얻는다. 가능한 자연수 순서쌍 (m,n)은 $(m,n)=(1,18)$, $(2,9)$, $(3,6)$, $(6,3)$, $(9,2)$ 또는 $(18,1)$ ------ (1) 이다. (2점) (iii) 조건 (마)로부터 $\beta=-\alpha+1$, 즉 $\alpha+\beta=1$ ------ (2) 을 얻는다. (1점) (iv) 다음을 유도한다. $ab=10^{\log ab}=10^{\log a+\log b}$ $=10^{(m+\alpha)+(n+\beta)}$ ((가), (나)에 의해) $=10^{(m+n)+1}$ ((2)에 의해) (3점) (v) 따라서 (1)에 의해 ab의 최댓값은 $(m,n)=(1,18)$ 또는 $(18,1)$일 때 10^{20}이고, ab의 최솟값은 $(m,n)=(3,6)$ 또는 $(6,3)$일 때 10^{10}이다. 두 값의 곱인 10^k은 10^{30}이고, 결국 $k=30$이다. (3점)

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (라)에서 가능한 자연수 순서쌍 (m,n)을 찾고, 조건 (마)로부터 $\alpha+\beta=1$을 얻는다.	4점
전개	$ab=10^{m+n+1}$임을 유도한다.	3점
결론	ab의 최댓값은 10^{20}이고, 최솟값은 10^{10}임을 밝힌다. 이로부터 $k=30$을 얻는다.	3점

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	3. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 7번	과목명	수학Ⅱ
내용영역	적분	행동영역	계산능력, 이해능력
정답	208	배점	10점
관련 성취기준	[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.		
문항	두 함수 $f(x)=-4x(x+3)(x-3),\quad g(x)=-16\lvert x\rvert+48$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.		

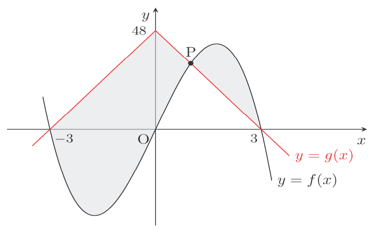
자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅱ	황선욱 외	동아출판	2021	128	제시문	O

문항 해설

(i) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다. 제1사분면에 존재하는 교점 P의 x좌표는 양수이다. 식 $f(x)=g(x)$를 세우면

$$-4x(x+3)(x-3)=-16x+48$$

즉 $(x-3)(x+4)(x-1)=0$이다. 따라서 점 P의 x좌표는 1이다. (3점)



(ii) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_{-3}^{0}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{0}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{1}^{3}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{0}\{(16x+48)-(-4x^3+36x)\}dx+\int_{0}^{1}\{(-16x+48)-(-4x^3+36x)\}dx+\int_{1}^{3}\{(-4x^3+36x)-(-16x+48)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{0}(4x^3-20x+48)dx+\int_{0}^{1}(4x^3-52x+48)dx+\int_{1}^{3}(-4x^3+52x-48)dx$$

$$=\left[x^4-10x^2+48x\right]_{-3}^{0}+\left[x^4-26x^2+48x\right]_{0}^{1}+\left[-x^4+26x^2-48x\right]_{1}^{3}$$

$$=153+23+32$$

$$=208$$ (7점)

단계	채점 기준	배점
도입	두 함수의 그래프의 제1사분면에서의 교점의 x좌표를 찾는다.	3점
전개 결론	두 함수의 크기관계를 고려하여 적분구간을 나눠 정적분 식을 세우고, 계산을 한다.	7점

채점 유의 사항	1. 함수의 그래프는 그리지 않아도 된다. 2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다. 3. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 8번	과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ
내용영역	수열, 적분	행동영역	추론능력, 문제해결능력
정답	$-\frac{3}{2}$	배점	10점
관련 성취기준	[12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.		
문항	모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다. (가) $\int_0^1 f(x)dx<0$ (나) $\int_{2020}^{2024} f(x)dx=130$ (다) $\int_{2022}^{2024} f(x)dx=90$ (라) 수열 $\{a_n\}$이 $a_n=\int_0^n f(x)dx\ (n=1,2,3,\ldots)$으로 정의될 때, $\{a_n\}$은 등비수열이다. 이 때, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비의 값을 구하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2021	133	제시문	O
수학Ⅱ	박교식 외	동아출판	2021	128	제시문	O

문항 해설

(i) 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하면

$$a_1=\int_0^1 f(x)dx,\quad a_n=\int_0^n f(x)dx=a_1r^{n-1}\ (n=1,2,3,\ \ldots)$$

이다. 그러면 조건 (나)와 (다), 정적분의 성질로부터

$$130=\int_{2020}^{2024} f(x)dx=\int_0^{2024} f(x)dx-\int_0^{2020} f(x)dx=a_{2024}-a_{2020}=a_1r^{2023}-a_1r^{2019}=a_1r^{2019}(r^4-1),\ \text{------}\ (1)$$

$$90=\int_{2022}^{2024} f(x)dx=\int_0^{2024} f(x)dx-\int_0^{2022} f(x)dx=a_{2024}-a_{2022}=a_1r^{2023}-a_1r^{2021}=a_1r^{2021}(r^2-1)\ \text{------}\ (2)$$

을 얻는다. (5점)

(ii) (1)과 (2)로부터 다음을 유도한다.

$$\frac{130}{90}=\frac{a_1r^{2019}(r^4-1)}{a_1r^{2021}(r^2-1)}=\frac{r^2+1}{r^2}$$

따라서 $r^2=\frac{9}{4}$이고, $r=\frac{3}{2}$ 또는 $-\frac{3}{2}$이다. (3점)

(iii) 조건 (가)에 의해 $a_1<0$이므로 (1) 혹은 (2)로부터 $r=-\frac{3}{2}$이어야 함을 알 수 있다. (2점)

단계	채점 기준	배점
도입	수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 할 때, 주어진 조건들과 정적분의 성질을 이용해서 두 개의 식 $130 = a_1 r^{2019}(r^4 - 1)$과 $90 = a_1 r^{2021}(r^2 - 1)$을 유도한다.	5점
전개	위에서 얻은 두 식으로부터 $r^2 = \frac{9}{4}$를 찾는다.	3점
결론	조건 (가)를 통해 $r = -\frac{3}{2}$임을 결론내린다.	2점

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	3. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 9번	과목명	수학 I
내용영역	삼각함수	행동영역	이해능력, 문제해결능력
정답	$\frac{\pi}{2}$	배점	12점
관련 성취기준	[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.		
문항	두 실수 a와 b에 대하여 실수 $a \odot b$를 다음과 같이 정의하자. $a \odot b = \begin{cases} a-b & (a \geq b) \\ 0 & (a < b) \end{cases}$ 이 때, 방정식 $(\sin\theta \odot \cos\theta) + (\cos\theta \odot (1 - \cos\theta)) = \sin\theta$를 만족시키는 θ의 값을 모두 구하시오. (단, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)		

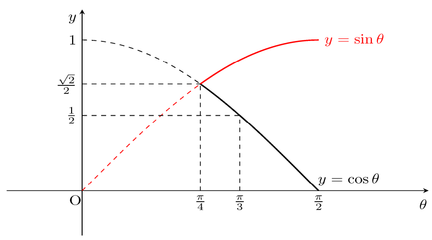
자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학 I	홍성복 외	지학사	2021	81	제시문	O

문항 해설

(i) $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta \geq \cos\theta$이므로

$$\sin\theta \odot \cos\theta = \sin\theta - \cos\theta$$

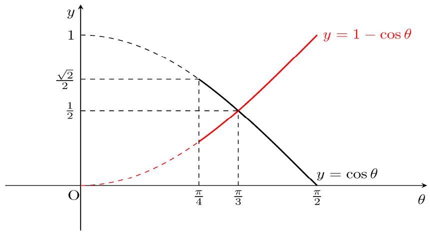
이다. (2점)



(ii) $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$에서 두 함수 $y = \cos\theta$와 $y = 1 - \cos\theta$의 그래프는 오른쪽과 같다.

문항 해설

$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$일 때는 $\cos\theta \ge 1-\cos\theta$이므로, 문제의 방정식



$(\sin\theta \odot \cos\theta) + \{\cos\theta \odot (1-\cos\theta)\} = \sin\theta$는

$$(\sin\theta - \cos\theta) + (\cos\theta - (1-\cos\theta)) = \sin\theta,$$

즉 $\cos\theta = 1$이 된다. 하지만 $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$에서 $\cos\theta = 1$을 만족하는 θ는 존재하지 않는다. (5점)

(iii) $\frac{\pi}{3} < \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때는 $\cos\theta < 1-\cos\theta$이므로, 문제의 방정식 $(\sin\theta \odot \cos\theta) + \{\cos\theta \odot (1-\cos\theta)\} = \sin\theta$는

$$(\sin\theta - \cos\theta) + 0 = \sin\theta$$

즉 $\cos\theta = 0$이 된다. $\frac{\pi}{3} < \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta = 0$을 만족하는 θ는 $\frac{\pi}{2}$이다. (5점)

(iv) 따라서 $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 문제의 방정식을 만족시키는 θ는 $\frac{\pi}{2}$뿐이다.

단계	채점 기준	배점
도입	$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta \odot \cos\theta = \sin\theta - \cos\theta$임을 찾는다.	2점
전개 결론	$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때 각각 문제의 방정식을 만족하는 θ의 값을 찾는다.	10점

채점 유의 사항	1. 그래프는 그리지 않아도 된다.
	2. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	3. 타당한 설명 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항번호	논술고사 자연계 10번	과목명	수학 I
내용영역	수열	행동영역	추론능력, 문제해결능력
정답	문항 해설 참고	배점	12점
관련 성취기준	[12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12수학 I 03-07] 수학적 귀납법의 원리를 이해한다. [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.		
문항	수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n^3 + 3a_n \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ 모든 자연수 n에 대하여 정수 $a_n^2 + 2$는 3^n의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2021	152	문항	O

문항 해설
(i) $n=1$일 때, $a_1^2+2=1^2+2=3$이고 $3^1=3$이므로 a_1^2+2는 3^1의 배수이다. 따라서 $n=1$인 경우에 a_n^2+2는 3^n의 배수이다. (2점) (ii) $n=k$ $(k \geq 1)$일 때, a_n^2+2가 3^n의 배수임을 가정하자. 그러면 $a_n^2+2 \geq 2$이므로 $a_k^2+2=3^k b$ ------ (1) 를 만족시키는 자연수 b가 존재한다. (3점) (iii) 다음을 유도한다. $a_{k+1}^2+2=(a_k^3+3a_k)^2+2$ (수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의에 의해) $=a_k^2(a_k^2+3)^2+2$ $=(3^k b-2)(3^k b+1)^2+2$ ((1)에 의해) $=(3^k b-2)(3^{2k}b^2+2\times 3^k b+1)+2$ $=(3^{3k}b^3+2\times 3^{2k}b^2+3^k b-2\times 3^{2k}b^2-4\times 3^k b-2)+2$ $=3^{3k}b^3-3^{k+1}b$ $=3^{k+1}(3^{2k-1}b^3-b)$ 이때 b는 자연수이고 3^{2k-1}은 3이상인 자연수이므로 $3^{2k-1}b^3-b=b(3^{2k-1}b^2-1)$도 자연수이다. 즉 a_{k+1}^2+2은 3^{k+1}의 배수이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 a_n^2+2는 3^n의 배수이다. (7점) (iv) 수학적 귀납법으로부터 모든 자연수 n에 대하여 a_n^2+2는 3^n의 배수이다.

단계	채점 기준	배점
도입	$n=1$일 때, 명제가 참임을 보인다.	2점
전개	$n=k$일 때, 명제가 참임을 가정한다. 이로부터 $a_k^2+2=3^k b$ 표현을 한다.	3점
결론	$n=k+1$일 때도 명제가 참임을 유도한다.	7점

채점 유의 사항	
	1. 수학적 귀납법이 아닌 다른 증명은 인정하지 않는다.
	2. 문항해설의 (iv) 부분은 작성하지 않아도 된다.
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.