문항카드 5. 논술전형 자연 T4

1 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명	논술전형 논술고사
해당 대학의 계열(과목) 및 문항번호	일요일 T4 - 자연계
출제 범위	2015개정 교육과정 수학Ⅰ, 수학Ⅱ
예상 소요 시간	80분

2 문항 및 문항해설

문항번호	논술고사 자연계열 1번	과목명	수학Ⅰ
내용영역	삼각함수의 뜻과 그래프	행동영역	계산능력
정답	$\frac{1}{3}$	배점	9점
성취수준	[12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.		
문항	x에 대한 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 한 근이 $\tan\theta$일 때, $\sin\theta\times\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, θ는 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 상수이다.)		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2021	79		O

문항해설

(i) 근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 1인데, 한 근이 $\tan\theta$이므로 나머지 한 근은 $\frac{1}{\tan\theta}$이다. **(3점)**

(ii) 근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3이므로

$$\begin{aligned} 3 &= \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta} && (2점)\\ &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} && (2점)\\ &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} && (1점)\end{aligned}$$

이 성립한다.

(iii) 따라서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$이다. **(1점)**

단계	채점기준	배점
도입	두 근의 곱이 1이고 한 근이 $\tan\theta$라는 것으로부터 나머지 한 근이 $\frac{1}{\tan\theta}$임을 파악한다.	3
전개	두 근의 합은 3이므로 $3=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$임을 파악하고, 우변을 $\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$로 변형한다.	5
결론	$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$임을 구한다.	1

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다.
	2. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta$는 임의의 양수가 가능하다. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 근은 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$인데 $\tan\theta$를 둘 중 하나로만 놓고 풀면 1점 감점한다.
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.

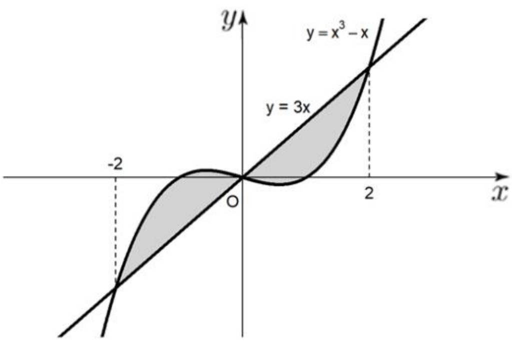
문항번호	논술고사 자연계열 2번	과목명	수학II
내용영역	정적분의 활용	행동영역	계산능력, 이해능력
정답	8	배점	9점
성취수준	[12수학II03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.		
문항	곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학II	박교식 외	동아출판	2021	142		O

문항해설

(i) $f(x)=x^3-x$, $g(x)=3x$로 두면 $f(x)-g(x)=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$이다. 따라서 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표는 -2, 0, 2이다. **(3점)**

(ii) 좌표평면에 두 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $g(x)$의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))dx$$

문항해설
이다. **(3점)** (iii) 함수 $f(x)-g(x)=x^3-4x$의 그래프는 원점대칭이므로 S는 다음과 같이 계산할 수 있다. $S=2\int_0^2(g(x)-f(x))dx=2\int_0^2(4x-x^3)dx=2\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=8$ **(3점)**

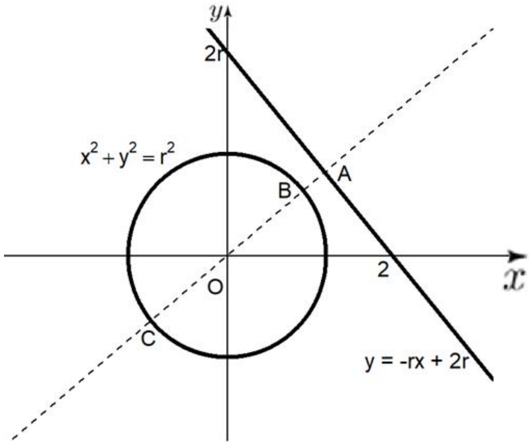
단계	채점기준	배점
도입	방정식 $f(x)-g(x)=0$을 풀어 교점의 x좌표를 구한다.	3
전개	넓이 계산을 위한 정적분식을 세운다.	3
결론	정적분 값을 구한다.	3

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다. 2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다. 3. 반드시 그래프를 그려서 풀 필요는 없다. 4. 원점 대칭임을 이용하지 않아도 무방하다.

문항번호	논술고사 자연계열 3번	과목명	수학Ⅱ
내용영역	함수의 극한	행동영역	이해능력, 추론능력
정답	3	배점	9점
성취수준	[12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.		
문항	원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점과 직선 $y=-rx+2r$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 $M(r)$과 $m(r)$이라고 할 때, $\lim_{r\to0+}\frac{M(r)}{m(r)}$의 값을 구하시오. (단, $0<r<\sqrt{3}$이다.)		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2021	19		O

문항해설
(i) 원의 중심을 지나고 직선 $\ell: y=-rx+2r$에 수직인 직선을 ℓ'이라고 하자. 두 직선 ℓ과 ℓ'의 교점을 A라 하고, 직선 ℓ'과 원의 두 교점 중 점 A에 더 가까운 점을 B, 나머지 점을 C라고 하자. 그러면 $M(r)$은 선분 AC의 길이이고, $m(r)$은 선분 AB의 길이이다. **(2점)** (ii) 원의 중심 $O(0,0)$과 직선 $\ell: rx+y-2r=0$ 사이의 거리를 d라고 하면 $M(r)=d+r,\ m(r)=d-r$ 이다. **(1점)** (iii) 한편, 점과 직선 사이의 거리 공식에 의해 $d=\frac{\lvert -2r\rvert}{\sqrt{r^2+1}}=\frac{2r}{\sqrt{r^2+1}}$ 이다. **(2점)** (iv) (ii)와 (iii)에 의해 구하려는 극한값은 다음과 같다.

문항해설

$\lim_{r\to0+}\frac{M(r)}{m(r)}=\lim_{r\to0+}\frac{\frac{2r}{\sqrt{r^2+1}}+r}{\frac{2r}{\sqrt{r^2+1}}-r}=\lim_{r\to0+}\frac{2r+r\sqrt{r^2+1}}{2r-r\sqrt{r^2+1}}=\lim_{r\to0+}\frac{2+\sqrt{r^2+1}}{2-\sqrt{r^2+1}}$ (2점)
$=\frac{2+1}{2-1}=3$ (2점)

단계	채점기준	배점
도입	$M(r)$, $m(r)$을 표현한다. (위의 (i), (ii))	3
전개	점과 직선 사이의 거리를 활용한다.	2
결론	극한의 값을 계산한다.	4

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다. 2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.

문항번호	논술고사 자연계열 4번	과목명	수학I
내용영역	수학적 귀납법	행동영역	추론능력, 문제해결능력
정답	문항해설 참조	배점	9점
성취수준	[12수학 I 03-07] 수학적 귀납법의 원리를 이해한다. [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.		
문항	모든 자연수 n에 대하여 다음 명제가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. 9^{2^n}을 2^{n+3}으로 나눈 나머지는 1이다.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학 I	이준열 외	천재교육	2021	162		O

문항해설

(i) $n=1$일 때 $9^{2^n}=9^2=81$, $2^{n+3}=16$이다. $81=16\times5+1$이므로 $9^{2^n}=81$을 $2^{n+3}=16$으로 나눈 나머지는 1이다. 즉, 주어진 명제가 $n=1$일 때 성립한다. **(3점)**

(ii) $n=k$(단, $k\ge 1$)일 때 위 명제가 성립한다고 가정하자. **(1점)**

즉, 어떤 정수 q(단, $q\ge 0$)에 대해

$$9^{2^k}=2^{k+3}q+1 \quad \text{--------------} \ (1)$$

이 성립한다. **(1점)**

(iii) 이제 (1)에 의해

$$9^{2^{k+1}}=9^{2^k\times2}=(9^{2^k})^2=(2^{k+3}q+1)^2=2^{2k+6}q^2+2^{k+4}q+1=2^{k+4}(2^{k+2}q^2+q)+1 \quad \text{---------} \ (2)$$

이 성립한다. 따라서 $9^{2^{k+1}}$을 자연수인 2^{k+4}으로 나누면, 정수인 몫은 $2^{k+2}q^2+q$이고 나머지는 1이다.

따라서 위 명제는 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i)~(iii)에 의해, 주어진 명제는 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. **(4점)**

단계	채점기준	배점
도입	$n=1$일 때 성립함을 보인다.	3
전개	$n=k$일 때 성립함을 가정하고, 식 (1)을 세운다.	2
결론	식 (1)을 이용해 식 (2)를 유도하고, 증명의 결론을 내린다.	4

채점 유의 사항	1. 수학적 귀납법이 아닌 다른 증명은 인정하지 않는다. 2. 문항해설의 마지막 문장 "(i)~(iii)에 의해, 주어진 명제는 모든 자연수 n에 대하여 성립한다."를 쓰지 않아도 감점하지 않는다. 3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.

문항번호	논술고사 자연계열 5번	과목명	수학 I
내용영역	지수와 로그	행동영역	계산능력, 추론능력
정답	$\sqrt{15}$, $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$	배점	10점
성취수준	[12수학 I 01-02] 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다. [12수학 I 01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. [12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.		
문항	상수 a, b, c가 다음 조건을 모두 만족한다. (가) $a>0$, $b>0$, $c>0$ (나) $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[5]{c}$ (다) $\log_3 \dfrac{bc}{a}=3$ 1보다 큰 두 실수 m과 n이 $\log_3 a\times\log_m b\times\log_n c=1$을 만족할 때, $\log_3 mn$의 최솟값과 그 때의 $\log_3 m$과 $\log_3 n$의 값을 구하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학I	류희찬 외	천재교과서	2021	33		O

문항해설

(i) (나)에 의해 상수 k를 $k=\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[5]{c}$로 둔다. 그러면

$$a=k^2,\ b=k^3,\ c=k^5$$

이 되고, 이를 (다)에서 주어진 식에 대입하면 $3=\log_3\dfrac{bc}{a}=\log_3 k^6$ 이므로 $\log_3 k=\dfrac{1}{2}$ 이다. 따라서

$$k=3^{\frac{1}{2}},\ a=3,\ b=3^{\frac{3}{2}},\ c=3^{\frac{5}{2}}\ \text{-------------}\ (1)$$

이다. **(3점)**

(ii) 1보다 큰 두 실수 m과 n이 $\log_3 a\times\log_m b\times\log_n c=1$을 만족한다면, 로그의 성질과 (1)에 의해

$$1=\log_3 a\times\frac{\log_3 b}{\log_3 m}\times\frac{\log_3 c}{\log_3 n}=\frac{1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}}{\log_3 m\times\log_3 n}$$

이므로

$$\log_3 m\times\log_3 n=\frac{15}{4}\ \text{---------------}\ (2)$$

가 된다. **(2점)**

(iii) 로그의 성질에 의해 $\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$이다. m과 n은 모두 1보다 크기 때문에 $\log_3 m$과 $\log_3 n$ 모두 양수임을 주목한다. **(1점)**

(iv) 이제, 양수인 $\log_3 m$과 $\log_3 n$에 대해 산술평균과 기하평균 사이의 관계를 이용하면 (2)에 의해

$$\frac{\log_3 m+\log_3 n}{2}\geq\sqrt{\log_3 m\times\log_3 n}=\sqrt{\frac{15}{4}}\ \text{---------}\ (3)$$

를 얻는다. 따라서 $\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$의 최솟값은 $2\sqrt{\dfrac{15}{4}}=\sqrt{15}$ 이다. **(3점)**

(v) 부등식 (3)의 등호가 성립할 조건은 $\log_3 m=\log_3 n$이다. 따라서 $\log_3 mn$이 최솟값을 가질 때 $\log_3 m$과 $\log_3 n$의 값은 $\log_3 m=\log_3 n=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 이다. **(1점)**

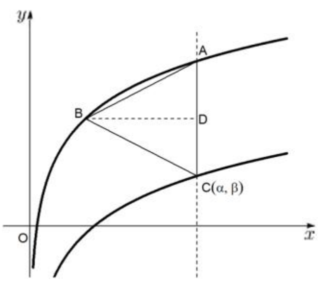
단계	채점기준	배점
도입	상수 a, b, c의 값을 찾는다.	3
전개	$\log_3 m\times\log_3 n$의 값을 구한다.	2
결론	산술기하평균 부등식을 이용해 $\log_3 mn$의 최솟값과 그 때의 $\log_3 m$과 $\log_3 n$의 값을 구한다.	5

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다. 2. $\log_3 m$과 $\log_3 n$에 산술기하평균 부등식을 적용할 때 두 값이 양수인지 확인하는 단계가 반드시 필요하다. (문항해설 (iii) 과정) 3. 단계 (i)에서 상수 a, b, c의 값을 문항해설에 제시된 방법이 아닌 다른 방식으로 구해도 무방하다. 4. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.

문항번호	논술고사 자연계열 6번	과목명	수학Ⅰ
내용영역	지수함수와 로그함수	행동영역	추론능력, 문제해결능력
정답	$\frac{27}{4}$	배점	10점
성취수준	[12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.		
문항	좌표평면 위의 세 점 A, B, C가 다음을 모두 만족한다. (가) 점 A와 B는 곡선 $y=\log_3 9x$ 위에 있다. (나) 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다. (다) 점 C는 곡선 $y=\log_3 x$ 위에 있다. (라) 선분 AC는 y축에 평행하다. (마) 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 점 C의 좌표를 (α,β)라고 할 때, $\alpha\times 3^{\beta}$의 값을 구하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅰ	배종숙 외	금성출판사	2021	48		O

문항해설



(i) 점 C의 좌표 (α,β)는 (다)에 의해 $(\alpha,\beta)=(\alpha,\log_3\alpha)$이다. **(1점)**

(ii) (라)와 (가)에 의해 점 A의 좌표는 $(\alpha,\log_3 9\alpha)=(\alpha,2+\log_3\alpha)$이고, 점 C의 좌표는 $(\alpha,\log_3\alpha)$이므로 선분 AC의 길이는 2이다. **(2점)**

(iii) (나)에 의해 점 B와 선분 AC는 왼쪽 그림과 같고, (마)와 (ii)에 의해 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다. 점 C의 좌표가 $(\alpha,\log_3\alpha)$이므로 점 B의 좌표는 $(\alpha-\sqrt{3},\log_3\alpha+1)$이다. **(2점)**

(iv) 한편 (가)와 점 B의 좌표가 $(\alpha-\sqrt{3},\log_3\alpha+1)$이라는 사실로부터

$$\log_3\alpha+1=\log_3 9(\alpha-\sqrt{3})$$

문항해설
이 성립한다. $\log_3 3\alpha = \log_3 9(\alpha - \sqrt{3})$ 을 풀어서 $\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 을 얻는다. **(3점)** (v) (i)에서 $\beta = \log_3 \alpha$ 이고 $\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로, $\beta = \log_3 \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다. **(1점)** (vi) 따라서 $\alpha \times 3^{\beta} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 3^{\log_3 \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$ 이다. **(1점)**

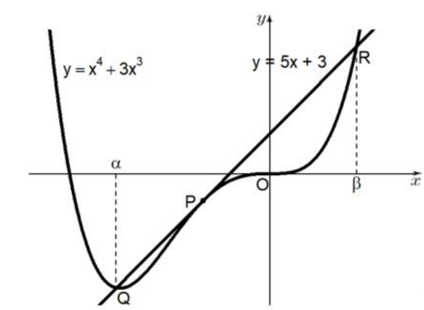
단계	채점기준	배점
도입	선분 AC의 길이가 2임을 확인한다.	3
전개	α와 β의 값을 구한다.	6
결론	$\alpha \times 3^{\beta}$의 값을 구한다.	1

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다. 2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다. 3. 그래프를 작성하지 않고 정답을 도출해도 무방하다.

문항번호	논술고사 자연계열 7번	과목명	수학Ⅱ
내용영역	도함수의 활용	행동영역	계산능력, 이해능력
정답	7	배점	10점
성취수준	[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.		
문항	곡선 $y=x^4+3x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\,-2)$ 에서의 접선은 점 P가 아닌 두 점 Q와 R에서 이 곡선과 만난다. 두 점 Q와 R의 x좌표를 각각 α와 β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학II	김원경 외	비상교육	2021	71		O

문항해설



(i) 함수 $y=x^4+3x^3$ 의 도함수는 $y'=4x^3+9x^2$ 이므로 점 P 에서의 접선의 기울기는 5 이고 접선의 방정식은 $y+2=5(x+1)$, 즉 $y=5x+3$ 이다. **(4점)**

(ii) 곡선과 점 P 에서의 접선의 교점을 조사하기 위해 방정식 $x^4+3x^3=5x+3$ 을 세운다.

$$x^4+3x^3-(5x+3)=(x+1)^2(x^2+x-3)$$

이고, 점 P 의 x좌표는 -1 이므로 점 Q 와 R 의 x좌표인 α와 β는 이차방정식 $x^2+x-3=0$ 의 두 근이다. **(3점)**

(iii) 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-3$ 이다. 따라서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+6=7$$

이다. **(3점)**

단계	채점기준	배점
도입	접선의 방정식을 구한다,	4
전개	α와 β는 이차방정식 $x^2+x-3=0$ 의 두 근임을 보인다.	3
결론	$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구한다.	3

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다. 2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다. 3. 그래프를 그리지 않고 풀어도 무방하다. 4. α와 β의 값을 구해 답을 도출해도 무방하다.

문항번호	논술고사 자연계열 8번	과목명	수학Ⅰ
내용영역	수열의 합	행동영역	계산능력, 추론능력
정답	8	배점	10점
성취수준	[12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.		
문항	수열 $\{a_n\}$이 다음을 모두 만족한다. (가) $\sum_{k=1}^{n} a_k = pn^2 + 20n$ (단, p는 상수이다.) (나) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 24$ 이 때, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8$의 값을 구하시오.		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅰ	고성은 외	좋은책 신사고	2021	121		O

문항해설

(i) 각각의 $n \geq 1$에 대해 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라고 하자. 그러면 $n \geq 2$일 때

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n \text{ ----------- (1)}$$

이 된다. **(1점)**

(ii) 한편 (가)에 의해

$$S_n - S_{n-1} = pn^2 + 20n - \{p(n-1)^2 + 20(n-1)\} = 2pn - p + 20 \quad (n \geq 2)$$

이므로 (1)에 의해

$$a_n = 2pn - p + 20 \quad (n \geq 2) \text{ -------------- (2)}$$

이다. **(2점)**

(iii) (가)에서 주어진 식에 $n=1$을 대입하면

$$a_1 = p + 20 \text{ -------------------- (3)}$$

이다. **(1점)**

(iv) (2)와 (3)으로부터

$$a_n = a_1 + 2p(n-1) \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1 = p + 20$이고 공차가 $2p$인 등차수열이다. **(2점)**

(v) 이제 (나)에 의해

$$24 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 4a_1 + 12 \times 2p = 4(p+20) + 24p = 28p + 80$$

이므로 $p = -2$임을 찾는다. **(2점)**

(vi) 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 $2p = -4$이므로 (나)를 활용하면

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) + 4 \times (-4) = 24 - 16 = 8$$

이다. **(2점)**

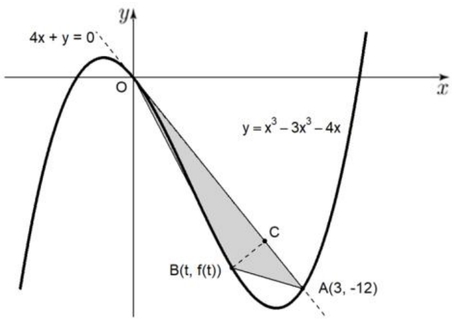
단계	채점기준	배점
도입	일반항 a_n을 구한다.	6
전개	p의 값을 구한다.	2
결론	$a_2 + a_4 + a_6 + a_8$의 값을 구한다.	2

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다. 2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다. 3. 일반항을 구하지 않고 조건식에 $n=1,2,...,8$을 대입해 답을 구한 경우도 인정한다. 4. a_1을 명시적으로 구하지 않고 등차수열이라고 기술한 경우 1점을 감점한다.

문항번호	논술고사 자연계열 9번	과목명	수학Ⅱ
내용영역	도함수의 활용	행동영역	추론능력, 문제해결능력
정답	6	배점	12점
성취수준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.		
문항	함수 $f(x)=x^3-3x^2-4x$의 그래프 위의 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(3,-12)$, $\mathrm{B}(t,f(t))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, $0<t<3$이다.)		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021	92		O

문항해설



(i) 점 O와 A를 지나는 직선 ℓ의 식은 $y=-4x$, 즉 $4x+y=0$이다. **(1점)**

(ii) 점 $\mathrm{B}(t,t^3-3t^2-4t)$에서 직선 ℓ에 내린 수선의 발을 C라고 하면 선분 BC의 길이는 점과 직선사이의 거리 공식에 의해

$$\frac{|4t+(t^3-3t^2-4t)|}{\sqrt{16+1}}=\frac{|t^3-3t^2|}{\sqrt{17}}$$

이다. **(2점)**

(iii) 삼각형 OAB의 밑변의 길이를 선분 OA의 길이로, 높이를 선분 BC의 길이로 생각하자. 그러면 선분 BC의 길이가 최대일 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 된다. **(2점)**

(iv) $t^3-3t^2=t^2(t-3)$이므로 $0<t<3$일 때 $|t^3-3t^2|=-t^3+3t^2$이다. 실수전체의 집합에서 정의된 t에 대한 함수 $g(t)=-t^3+3t^2$을 미분하면

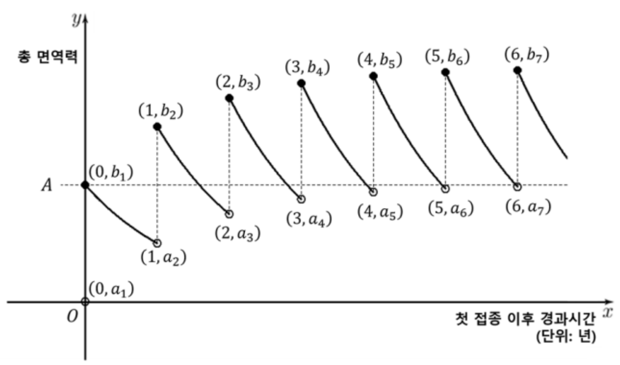
$$g'(t)=-3t^2+6t=-3t(t-2)$$

이고, $g'(t)=0$이 되는 t는 0과 2이다. $g'(t)=-3t(t-2)$의 부호를 따져 그래프의 개형을 생각해볼 때 $g(t)$는 $t=0$에서 극솟값 $g(0)=0$을 갖고, $t=2$에서 극댓값 $g(2)=4$를 갖는다. 열린구간 $(0,3)$에서 함수 $g(t)$의 최댓값은 $g(2)=4$이다. 따라서 (ii)에 의해 선분 BC의 길이의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{17}}$이다. **(5점)**

(v) 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{153}\times\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로, 최댓값은 $\frac{1}{2}\times\sqrt{153}\times\frac{4}{\sqrt{17}}=6$ 이다. **(2점)**

단계	채점기준	배점
도입	선분 BC의 길이가 최대일 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대임을 설명한다.	5
전개	선분 BC의 길이의 최댓값을 구한다.	5
결론	삼각형 OAB의 넓이의 최댓값을 구한다.	2

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다. 2. 그림을 그리지 않고 풀어도 무방하다. 3. 점 B에서의 접선이 직선 OA와 평행할 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대라고 주장하는 경우 타당한 설명이 없으면 2점 감점한다. 4. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.

문항번호	논술고사 자연계열 10번	과목명	수학I
내용영역	등차수열과 등비수열	행동영역	이해능력, 추론능력, 문제해결능력
정답	3	배점	12점
성취수준	[12수학 I 01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다. [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.		
문항	다음은 신종 바이러스에 대처하기 위해 개발된 백신에 대한 설명이다. (가) 최초 백신 접종 전 이 신종 바이러스에 대한 면역력은 0이다. (나) 최초 백신 접종 후 1년마다 1회씩 주기적으로 접종한다. (다) 새롭게 백신을 접종하는 즉시 면역력은 A만큼 증가한다. (단, $A>0$이다.) (라) 새롭게 접종한 백신에 의한 면역력은 접종 후 t년이 경과한 시점에 $A\times\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 이 된다. (단, $t>0$이다.) (마) 백신을 여러 차례 접종한 경우, 총 면역력은 그간 접종한 각 백신에 의한 면역력을 모두 더한 값이다. 다음 그림에서 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 각각 n차 접종 직전의 총 면역력과 접종 직후의 총 면역력이다. 이 백신을 몇 회 접종한 이후부터 총 면역력이 $A\times0.8$ 이상으로 계속 유지되는지 밝히시오. (12점)  		

자료명(도서명)	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학 I	고성은 외	좋은책 신사고	2021	125		O

문항해설
[풀이 1] (i) $a_1=0$이다. 그리고 $n\ge 2$일 때 $$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(k\text{차 접종 백신의 면역력})=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{A\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{A\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}=A\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$ 이다. (6점) (ii) 제시된 그래프로부터 n회 접종 이후부터 면역력이 $A\times 0.8$ 이상으로 유지된다는 것은 n이 부등식 $$a_{n+1}=A\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\ge A\times 0.8 \text{ --------- } (1)$$ 을 만족하는 가장 작은 자연수라는 것과 동치이다. 식 (1)을 만족하는 가장 작은 자연수 n은 3이다. 따라서 3회 접종 이후부터 총 면역력이 $A\times 0.8$ 이상으로 유지된다. **(6점)** [풀이 2] (i) $a_1=0$, $a_2=\frac{A}{2}$, $a_3=\frac{A}{4}+\frac{A}{2}=\frac{3}{4}A$, $a_4=\frac{A}{2}+\frac{A}{4}+\frac{A}{8}=\frac{7}{8}A,\ldots$ 을 계산한다. **(6점)** (ii) $a_{n+1}\ge A\times 0.8$ 를 만족하는 n의 최솟값을 찾으면 $n=3$이다. 따라서 제시된 그래프에 의해 3회 접종 이후 총 면역력이 $A\times 0.8$ 이상으로 유지된다. **(6점)**

단계	채점기준	배점
도입	a_n을 구한다.	6
전개 결론	3회 접종 이후 총 면역력이 $A\times 0.8$ 이상을 유지함을 밝힌다.	6

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법의 풀이도 정답으로 인정한다. 2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.