	한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시	
자연 계열	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1번

1. $\frac{a}{3}(a-c)^3+\frac{b}{2}(a-c)^2+c(a-c)=n$ 이라 하면 (단, n은 자연수),

n은 자연수이므로 $a>c$가 성립해야 한다.

양변에 6을 곱하면, $2a(a-c)^3+3b(a-c)^2+6c(a-c)=6n$인데 양변을 각각 2와 3으로 나눌 수 있어야 하므로 다음의 (A)와 (B)가 참이어야 한다.

(A): $b(a-c)^2$은 2의 배수.

(B): $a(a-c)^3$은 3의 배수.

다음과 같이 (A)를 (A1), (A2) 그리고 (B)를 (B1), (B2)로 나누어 생각하자.

(A1): b가 2의 배수, 즉 $b=2,4,6$.

(A2): b가 2의 배수는 아니고 $(a-c)$가 2의 배수, 즉

$(a,b,c)=$ $(6,5,2),(6,3,2),$ $(5,5,1),(5,3,1),(5,1,1),(6,5,4),(5,5,3),(5,3,3),(4,3,2),(3,3,1),(3,1,1)$.

(B1): a가 3의 배수, 즉 $a=3,6$.

(B2): a가 3의 배수는 아니고 $(a-c)$가 3의 배수, 즉

$(a,b,c)=$ $(5,5,2),(5,4,2),(5,3,2),(5,2,2),(4,4,1),(4,3,1),(4,2,1),(4,1,1)$.

이제 (A)이고 (B)인 경우는 다음의 4가지 종류로 나누어 셀 수 있다.

<u>(A1)이고 (B1)</u>:

$(a,b,c)=$ $(3,2,2),(3,2,1),(6,6,5),(6,6,4),(6,6,3),(6,6,2),(6,6,1),(6,4,4),(6,4,3),(6,4,2),(6,4,1),(6,2,2),(6,2,1)$.

<u>(A1)이고 (B2)</u>: $(a,b,c)=$ $(5,4,2),(5,2,2),(4,4,1),(4,2,1)$.

<u>(A2)이고 (B1)</u>: $(a,b,c)=$ $(6,5,2),(6,3,2),(6,5,4),(3,3,1),(3,1,1)$.

<u>(A2)이고 (B2)</u>: 없음.

따라서 묻고 있는 경우의 수는 13+4+5= 22.

2. 두 점 Q, R 사이의 거리를 l, 점 P 에서 선분 $\overline{QR}$ 까지의 거리를 d라고 하자.

삼각형 $\triangle PQR$ 의 넓이를 S라고 하면, $S=\frac{1}{2}dl$ 이다.

선분 $\overline{QR}$ 은 직선 $x+3y-6=0$ 위에 있으므로, $d=\frac{|p+3-6|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|p-3|}{\sqrt{10}}$ 이다.

점 $Q(x_1,y_1)$, $R(x_2,y_2)$ 사이의 거리는

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left((-\frac{1}{3}x_1+2)-(-\frac{1}{3}x_2+2)\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{9}(x_1-x_2)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}|x_1-x_2|$$

원 O와 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 이 만나는 두 점 Q, R 을 구하자.

원 O 의 방정식은 $(x-p)^2+(y-1)^2=1$ 이므로

$$(x-p)^2+(-\frac{1}{3}x+2-1)^2=1 \quad \Rightarrow (x-p)^2+(-\frac{1}{3}x+1)^2=1$$
$$\Rightarrow 9(x-p)^2+x^2-6x=0 \quad \Rightarrow 10x^2-6(3p+1)x+9p^2=0$$

이다. 두 근 사이의 거리는 $|x_1-x_2|=\frac{1}{5}\sqrt{-9p^2+54p+9}$ 이고, $l=\frac{\sqrt{10}}{15}\sqrt{-9p^2+54p+9}$ 이다.

따라서, $S=\frac{1}{30}|p-3|\sqrt{-9p^2+54p+9}$ 이다.

S^2가 최대일 때 S가 최대이므로,

$V(x)=\frac{1}{30^2}(x-3)^2(-9x^2+54x+9)$가 $0<x<3$에서 최대가 되는 점을 구하면 된다.

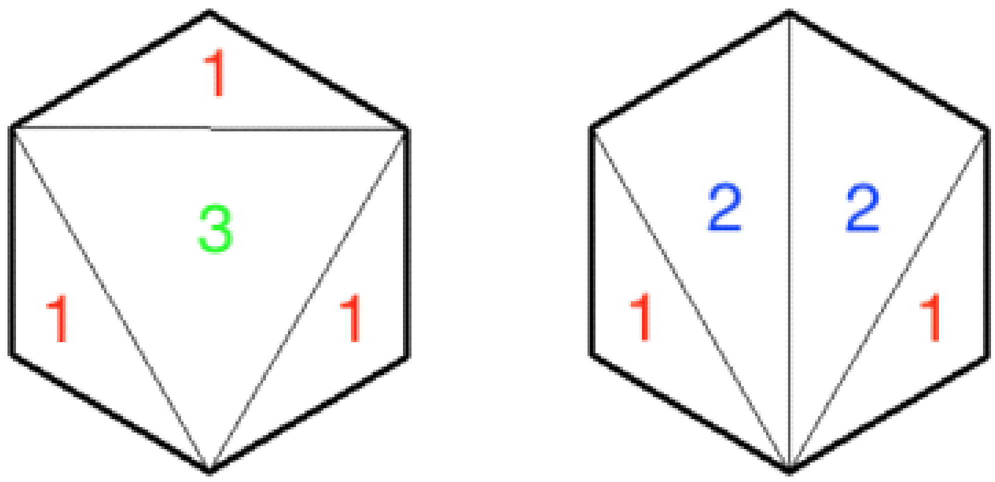
$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{1}{30^2}\left(2(x-3)(-9x^2+54x+9)+(x-3)^2(-18x+54)\right) \\ &= \frac{18(x-3)}{30^2}((-x^2+6x+1)-(x-3)^2) \\ &= \frac{18(x-3)}{30^2}(-2x^2+12x-8) \\ &= -\frac{36(x-3)}{30^2}(x^2-6x+4) \end{aligned}$$

이므로, $V(x)$는 $x=3-\sqrt{5},\ 3,\ 3+\sqrt{5}$에서 극값을 가지고, $x=3-\sqrt{5},\ 3+\sqrt{5}$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

그러므로 $V(x)$는 $0<x<3$에서 $x=3-\sqrt{5}$일 때 최댓값을 갖고, 마찬가지로 S는 $p=3-\sqrt{5}$일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $S=\frac{1}{30}\,|\,p-3\,|\,\sqrt{-9p^2+54p+9}=\frac{1}{30}\,|\,p-3\,|\,\sqrt{-9(p^2-6p+4)+45}=\frac{1}{30}\sqrt{5}\sqrt{45}=\frac{1}{2}$ 이다.

3. 한 변의 길이가 $\sqrt[4]{n}$인 정육각형으로 만들 수 있는 모든 삼각형의 개수는 총 6개의 꼭짓점에서 세 개의 꼭짓점을 고르는 경우의 수와 같고, 이는 ${}_6C_3=\frac{6!}{3!3!}=20$이다. 이 삼각형들은 그 모양에 따라 다음의 세 가지로 구분할 수 있고 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.



종류	설명	개수	넓이(S)
①	두 변의 길이가 $\sqrt[4]{n}$이고 그 끼인각이 120°인 이등변삼각형	6	$S=\frac{1}{2}\times\sqrt[4]{n}\times\sqrt[4]{n}\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\sqrt{n}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{n}$
②	한 변의 길이가 $\sqrt[4]{n}$이고 빗변의 길이가 $2\sqrt[4]{n}$이며 앞서 말한 두 변 사이의 끼인각이 60°인 직각삼각형	12	$S=\frac{1}{2}\times\sqrt[4]{n}\times 2\sqrt[4]{n}\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{n}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n}$
③	한 변의 길이가 $\sqrt[4]{9n}$인 정삼각형	2	$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt[4]{9n})^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{n}$

종류 ①의 삼각형(그림의 1번 삼각형)은 한 꼭짓점과 그 꼭짓점에 인접한 두 개의 꼭짓점을 연결하여 만들 수 있고, 한 꼭짓점마다 한 개를 만들 수 있으므로 총 6개를 만들 수 있다. 종류 ②의 삼각형(그림의 2번 삼각형)은 한 꼭짓점과 그 꼭짓점에 반대편에 위치한 꼭짓점 및 그 꼭짓점의 인접한 두 개의 꼭짓점 중 하나를 선택하고 연결하여 만들 수 있고, 한 꼭짓점마다 두 개를 만들 수 있으므로 총 12개를 만들 수 있다. 마지막으로 종류 ③의 정삼각형(그림의 3번 삼각형)은 한 꼭짓점에서 이웃한 꼭짓점을 한 번 건너뛴 후 그 다음 꼭짓점을 선택하는 식으로 만들 수 있으며, 총 2개를 만들 수 있다.

한편 종류에 따른 삼각형의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다. 종류 ①의 삼각형은 두 변의 길이가 각각 a,b이고 그 끼인각 θ를 알 때 삼각형의 넓이를 구하는 공식인 $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$를 이용하며, 이를 이용해 삼각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt[4]{n}\times\sqrt[4]{n}\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\sqrt{n}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{n}$ 임을 알 수 있다. 종류 ②의 삼각형은 한 변의 길이와 빗변의 길이를 이용해 두 변 사이의 끼인각이 $\cos\theta=\frac{\sqrt[4]{n}}{2\sqrt[4]{n}}=\frac{1}{2}$, 즉 $\theta=\frac{\pi}{3}$임을 알 수 있으며, 이를 이용해 삼각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt[4]{n}\times 2\sqrt[4]{n}\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{n}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n}$임을 알 수 있다. 종류 ③의 정삼각형은 한 변의 길이가 $\sqrt{3}\sqrt[4]{n}=\sqrt[4]{9n}$인 정삼각형의 넓이를 구하는 것과 같고, 이는 한 변의 길이가 a일 때 정삼각형의 넓이를 구하는 공식인 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$을 이용하여 삼각형의 넓이가 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt[4]{9n})^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{n}$임을 알 수 있다.

이에 따라 삼각형의 종류가 ①과 ③일 때에는 n이 어떤 자연수 k에 대해 $n=48\times k^2$로 표현될 경우, ②일 때에는 n이 어떤 자연수 k에 대해 $n=12\times k^2$로 표현될 경우 S가 정수가 됨을 알 수 있다. 48과 자연수의 거듭제곱의 곱 중 2025보다 작은 자연수의 개수는 $48\times 6^2=1728, 48\times 7^2=2352$이므로 6개이고, 12와 자연수의 거듭제곱의 곱 중 2025보다 작은 자연수의 개수는 $12\times 12^2=1728, 12\times 13^2=2028$이므로 12개이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{2025} a_n = (6+2) \times 6 + 12 \times 12 = 192$이다.

한양대학교 2025학년도 신입학전형 수시

자연 계열	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. 삼각형 PQR 은 정삼각형이다. $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{EQ}}=\overline{\mathrm{GR}}=t$ (단, $0 \le t \le 1$) 라 하면, 오른쪽 그림에서 정삼각형 PQR 의 한 변의 길이는

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-t)^2+\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2} = \sqrt{2-2t+2t^2}$$ 이고,

따라서 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2-2t+2t^2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-t+t^2\right)$

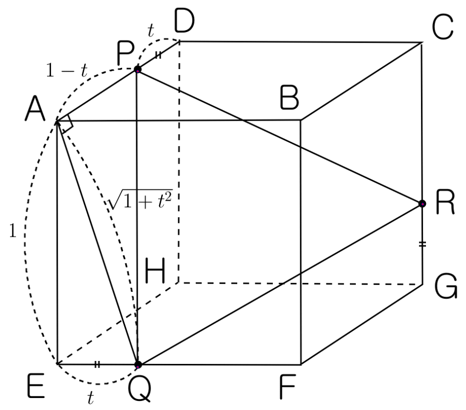
이다. 삼각형 PQR 의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이는 오른쪽 두 번째 그림에서

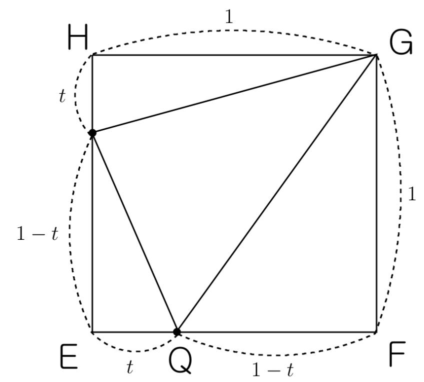
$$1\times1-\left\{\frac{1}{2}\times1\times t+\frac{1}{2}\times(1-t)\times t+\frac{1}{2}(1-t)\times1\right\}=\frac{1}{2}\left(1-t+t^2\right)$$

이다. 따라서 평면 PQR 과 평면 EFGH 가 이루는 각을 θ 라 하면

$$\cos\theta=\frac{\text{정사영의 넓이}}{\text{삼각형 PQR의 넓이}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-t+t^2\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-t+t^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$ 이고, 이는

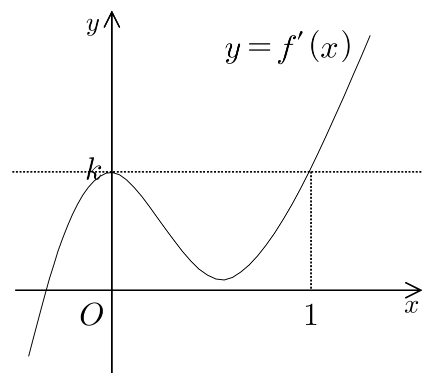
상수이므로 두 평면이 이루는 각은 일정함을 알 수 있다.





2. 점 (1,1)과 점 (1,2)를 세 가지 색 중 서로 다른 색으로 색칠하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$ 이다. $1 \le x \le 6$ 인 자연수 x에 대하여 점 $(x,1)$과 점 $(x,2)$가 세 가지 색 중 서로 다른 두 가지 색으로 색칠되어 있을 때, 조건을 만족시키며 점 $(x+1,1)$과 점 $(x+1,2)$를 색칠하는 경우는 총 가능한 여섯 가지 경우에서 $(x,1)$과 $(x+1,1)$이 같은 색인 경우와 $(x,2)$와 $(x+1,2)$가 같은 색인 경우를 제외하여 모두 세 가지 경우가 있다. 그러므로 주어진 조건을 만족시키며 색칠할 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times3^6=2\times3^7=4374$ 이다.

3. $f''(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$ 이므로 함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 극대가 되며 극댓값은 $f'(0)=k$ 이고, $x=2/3$에서 극소가 되며 극솟값은 $f'(2/3)=-4/27+k$ 이다. 그러므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이로부터 $f'(0)=k<0$ 또는 $f'(2/3)=-4/27+k>0$ 인 경우 $f'(x)=0$은 오직 1개의 근만을 가지며 이 점에서 함수 $f(x)$가 극소임을 알 수 있고, $f'(0)=k=0$ 또는 $f'(2/3)=-4/27+k=0$인 경우 $f'(x)=0$은 서로 다른 2개의 근을 가지는데 이 중 중근은 함수 $f(x)$의 극값이 아니지만 나머지 한 점에서는 $f(x)$가 극소임을 알 수 있으며, $f'(0)>0>f'(2/3)$, 즉 $0<k<4/27$인 경우 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가지며 이 중 두 점에서는 함수 $f(x)$가 극소, 나머지 한 점에서는 극대임을 확인할 수 있다.

그러므로 각각의 경우에 대해 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 확인하면 $0<k<4/27$인 경우는 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점이 0개에서 최대 4개까지 생길 수 있음을 알 수 있다.

$k<0$ 또는 $k>4/27$ 인 경우는 직선 $y=t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점이 0개에서 최대 2개까지 생기나, 오직 1개의 t에 대해서만 교점이 1개가 생기므로, 이 경우 함수 $g(t)$는 오직 한 점에서만 연속이 아님을 알 수 있다. 마지막으로 $k=0$ 또는 $k=4/27$인 경우는 $k<0$ 또는 $k>4/27$ 인 경우와 같음을 알 수 있다. 그러므로 $k \le 0$ 또는 $k \ge 4/27$이면 함수 $g(t)$는 연속이 아닌 점을 오직 1개만 갖는다.