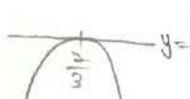
문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 가로행 2개 중 위에 위치하는 가로행을
① 가로행, 아래는 ② 가로행이라 하자.
① 가로행에서 노란색을 기준으로 노란색이
0개, 1개, 2개의 정사각형에 칠해지는 것으로
나눈다.
i) 노란색이 0개 칠해진 경우
조건에 의해 색칠되는 빨간색, 파란색의
정사각형 개수의 순서쌍은 (3, 2), (4, 1), (5, 0)
이때 경우의 수는 ${}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$
ii) 노란색이 1개 칠해진 경우
마찬가지로 (3, 1), (4, 0)의 순서쌍을 갖고
경우의 수는 ${}_5C_1 \times ({}_4C_3 + {}_4C_4)$
iii) 노란색이 2개 칠해진 경우
이때도 순서쌍은 (2, 1) (3, 0)
경우의 수는 ${}_5C_2 \times ({}_3C_2 + {}_3C_3)$
② 가로행을 보면 마찬가지로 경우의 수를 구하면,
$({}_6C_4 + {}_6C_5 + {}_6C_6) + {}_6C_1({}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5) + {}_6C_2({}_4C_3 + {}_4C_4)$
① 가로행의 경우의 수와 ② 가로행의 경우의 수를
곱하면 (∵ 동시에 발생하는 사건이므로)
$(16 + 25 + 40) \times (22 + 96 + 75)$
$= 81 \times 193 = 15633$

2. 세로열의 넓이는 각각 10씩이다.
이때 $p+q+r = 10n$
$p \geq n$, $q \geq n$, $r \geq n$ 이고
let, $p' = p-n$, $q' = q-n$, $r' = r-n$
$p' \geq 0$, $q' \geq 0$ $r' \geq 0$
$p'+q'+r' = 7n$ (p, q, r)의 개수는
${}_3H_{7n} = f(n)$
$\therefore f(5) = {}_3H_{35} = {}_{37}C_{35} = 666$
$f(7) = {}_3H_{49} = {}_{51}C_{49} = 1275$
$\therefore f(5) + f(7) = 666 + 1275 = 1941$

3.
$f(x)$의 최고차항을 a라 하자. $(a \neq 0)$
i) $a > 0$ $f'(x)$는  아래로 볼록한 포물선
즉, <나> 조건 만족 불가능하다.
$\therefore a < 0$
$f'(x)$는 

$y=b$ (b는 실수)
<나> 조건을 만족 시키기 위해
이와 같은 형태이다.
$f'(x) = 3a(x - \frac{2}{3})^2 + b$
$f'(0) = 18$ 이므로 $\frac{4}{3}a + b = 18$ … ①
$f(x) = a(x - \frac{2}{3})^3 + bx + C$ (C는 적분상수)
$f(-1) = 0$ 과 $f(3) = 0$ 을 이용하여 정리하면
$\frac{117}{27}a + b = 0$ … ② ①과 ②를 연립
$a = -6$ $\therefore b = 26$ 이를 통해 C를 구하면
$C = -\frac{16}{9}$
$\therefore f(x) = -6(x - \frac{2}{3})^3 + 26x - \frac{16}{9}$
$\int_{-1}^{c} \left(-6(x - \frac{2}{3})^3 + 26x - \frac{16}{9}\right) dx$
$= \left[-\frac{3}{2}(x - \frac{2}{3})^4 + 13x^2 - \frac{16}{9}x\right]_{-1}^{c}$
c가 1, 2, 3 일때 각각 정적분 값을 구하면
$c = 1$ 일때 8, $c = 2$일때 $\frac{81}{2}$,
$c = 3$ 일때 64
표를 그려보면

Y	8	$\frac{81}{2}$	64
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\therefore E(Y) = \frac{8}{6} + \frac{81}{6} + 32$
$= \frac{89}{6} + 32 = \frac{281}{6}$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

P의 좌표를 (a, b)라 하자. 점 Q가 점 P에서 $y=x$에 대해 대칭이므로 (b, a)이다.

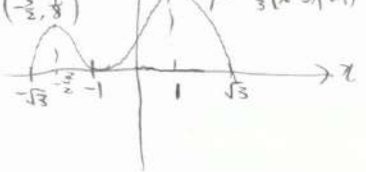
P는 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}$의 위의 점이므로 $2a^2+3b^2=6$ $(-\sqrt{3} \le a \le \sqrt{3},\ -\sqrt{2} \le b \le \sqrt{2})$ 가 성립한다. ······ ①

$\overrightarrow{AP} = (a+1, b)$, $\overrightarrow{BQ} = (b, a+1)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 2(a+1)b$

①에 의해 $b = \pm\sqrt{2-\frac{2}{3}a^2}$ 이다.

$b=\sqrt{2-\frac{2}{3}a^2}$ 인 경우 $2(a+1)b = 2\sqrt{-\frac{2}{3}(a^2-3)(a+1)^2}$



$y = -\frac{2}{3}(x^2-3)(x+1)^2$ $(-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3})$

$y' = -\frac{4}{3}(x+1)(2x+3)(x-1)$

x이 1, $-\frac{3}{2}$일 때 극이

$y = -\frac{2}{3}(x^2-3)(x+1)^2$가 최대일 때 $2(a+1)b$가 최대가 되므로

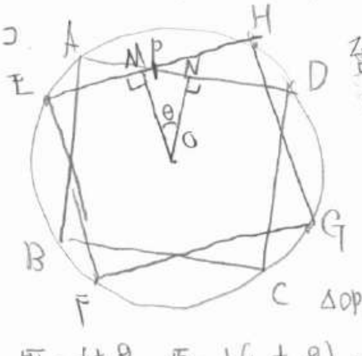
$2(a+1)b \le 2\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ 이다.

$b=-\sqrt{2-\frac{2}{3}a^2}$ 인 경우 $2(a+1)b = -2\sqrt{-\frac{2}{3}(a^2-3)(a+1)^2}$

$-\frac{2}{3}(a^2-3)(a+1)^2$가 최솟값일 때 최대 0 이다.

따라서 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값은 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 이다.

2.



점 O에서 $\overline{EH}$, $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자

$\angle MON = \theta$

$\overline{AD}$와 $\overline{EH}$의 교점을 P라 하면 □MON의 내대각인 $\angle APE = \theta$이다.

$\triangle OPM \equiv \triangle OPN$ 이고 $\overline{AB} = 2\overline{ON} = 1$이므로

$\overline{PN} = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}$, $\overline{AP} = \frac{1}{2}\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)$ 이로 등에

$S(\theta) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\tan\theta = 1 - \frac{1}{2}\tan\theta\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)^2$

$S'(\theta) = -\frac{1}{2}\sec^2\theta\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 - \tan\theta\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\right)$

$S'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \sqrt{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{10}{3}$ 이다.

3.

$f(x) = \cos x$, $g(x) = 1-ax^2$ 라 하자

$f(x)$와 $g(x)$가 만나는 점의 개수가 $4n+1$이 되기 위해선

$(0,1)$에서 만나야 하고 $f(x)$와 $g(x)$가 우함수이므로 $x>0$일 때

$2n$개의 점에서 만나야 한다

따라서 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=t$인 어느 한 점에서 접해야 한다. $(t>0)$

$\cos t = 1-at^2$ $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = -2ax$ 이므로

$\sin t = 2at$

$\cos^2 t = (at^2-1)^2$, $\sin^2 t = 4a^2t^2$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = a^2t^4 - 2at^2 + 1 + 4a^2t^2$

$a^2t^4 - 2at^2 + 4a^2t^2 = 0$

$at^2(at^2 - 2 + 4a) = 0$ $at^2 > 0$ $\therefore at^2 - 2 + 4a = 0$

$\therefore a = \frac{2}{t^2+4} = a_n$

$\lim_{n\to\infty}\cos\sqrt{\frac{2}{a_n}-4} = \lim_{n\to\infty}\cos t$

위 식에서

$\cos t = 1-at^2 = 1-\frac{2t^2}{t^2+4}$

$\lim_{n\to\infty}\cos\sqrt{\frac{2}{a_n}-4} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2t^2}{t^2+4}\right)$

$n\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\cos\sqrt{\frac{2}{a_n}-4} = -1$ 이다.