한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시

| 자연 계열 | **모 의 논 술 예 시 답 안** | 1번 |
|---|---|---|

1. $2n+1$개의 홀수 중에서 $n$개 이하의 홀수를 선택하는 경우의 수는

$$ {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_n = \frac{1}{2}\left( {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_n + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1} \right) = \frac{1}{2}\, 2^{2n+1} = 2^{2n}. $$

$2n+1$개의 짝수 중에서 $t$개의 짝수를 선택하는 경우의 수는 ${}_{2n+1}\mathrm{C}_t$ 이다.

따라서 문제에 제시된 조건을 만족하는 $A$의 부분집합들의 개수는

$$ {}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+1} \times 2^{2n} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{n+2} \times 2^{2n} + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1} \times 2^{2n} $$
$$ = \frac{1}{2}\left( {}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_n + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1} \right) \times 2^{2n} = \frac{1}{2}\, 2^{2n+1} \times 2^{2n} = 2^{4n}. $$

2. 임의의 실수 $a, b$에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$이므로,

$$ f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \text{이고, } 6 = f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = f(1+1) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1). $$

따라서 $f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4$. 또한, $f(2-x) = f(2) - f(x)$이므로

$f(x) = t$ 로 치환해서 적분하면

$$ {}_{20}C_{10} \int_0^2 f(x)^9 f(2-x)^{10} f'(x)\, dx = {}_{20}C_{10} \int_0^4 t^9 (4-t)^{10}\, dt \text{ 이고,} $$

$I = \int_0^4 t^9 (4-t)^{10}\, dt$ 에 부분적분을 적용하면

$$ I = \int_0^4 t^9 (4-t)^{10}\, dt = [\frac{1}{10} t^{10} (4-t)^{10}]_0^4 + \int_0^4 t^{10} (4-t)^9\, dt $$
$$ = \int_0^4 t^{10} (4-t)^9\, dt = \left[ \frac{1}{11} t^{11} (4-t)^9 \right]_0^4 + \frac{9}{11} \int_0^4 t^{11} (4-t)^8\, dt $$
$$ = \frac{9}{11} \int_0^4 t^{11} (4-t)^8\, dt = \frac{9}{11} \frac{8}{12} \int_0^4 t^{12} (4-t)^7\, dt $$
$$ = \cdots = \frac{9}{11} \frac{8}{12} \frac{7}{13} \cdots \frac{1}{19} \int_0^4 t^{19} (4-t)^0\, dt $$
$$ = \frac{9}{11} \frac{8}{12} \frac{7}{13} \cdots \frac{1}{19} \frac{4^{20}}{20} $$

따라서

$$ {}_{20}C_{10} I = {}_{20}C_{10} \frac{9}{11} \frac{8}{12} \cdots \frac{1}{19} \frac{4^{20}}{20} = \frac{2^{40}}{10} = \frac{2^{39}}{5}. $$

3. 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H′라 하면

$$ \overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{DA}} \cos\angle\mathrm{DAB} = 5 \times \frac{3}{5} = 3,\ \ \overline{\mathrm{DH}} = \overline{DA} \sin\angle\mathrm{DAB} = 5 \times \frac{4}{5} = 4 $$

$$ 4 = \overline{\mathrm{DH}} = \overline{CH'} = \overline{\mathrm{BC}} \sin(\pi - \angle\mathrm{BCD}) = \overline{\mathrm{BC}} \sin\angle\mathrm{BCD} = \overline{\mathrm{BC}} \times \frac{2}{\sqrt{5}},\ \text{즉, } \overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{5} $$

따라서

$$ \overline{\mathrm{H'B}} = \overline{BC} \cos(\pi - \angle\mathrm{BCD}) = -2\sqrt{5} \cos\angle\mathrm{BCD} = 2\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 2 \text{ 이고,} $$

$$ \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AH}} + \overline{\mathrm{CD}} + \overline{\mathrm{H'B}} = 3 + 1 + 2 = 6. $$

점 A가 원점, 선분 AB가 $x$축에 놓여있다고 하면, 점 A의 좌표는 (0,0), 점 B의 좌표는 (6,0), 점 C의 좌표는 (4,4), 점 D의 좌표는 (3,4)이다. 점 P의 좌표를 $(x,y)$라 하면, $(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{CP}) \cdot (2\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{DP}}) = \frac{67}{8}$로부터

$$((x,y)+(x-4,y-4)) \cdot (2(x-6,y)+(x-3,y-4)) = (2x-4,2y-4) \cdot (3x-15,3y-4)$$
$$= (2x-4)(3x-15)+(2y-4)(3y-4) = \frac{67}{8}$$

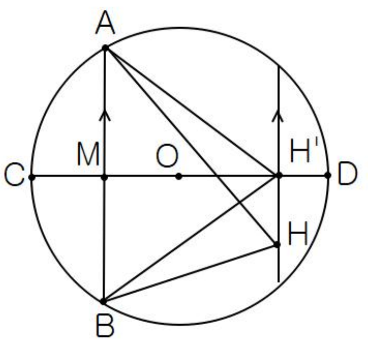
즉, $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{541}{144}$ 이다. 따라서 점 P는 중심이 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{3}\right)$이고 반지름이 $\frac{\sqrt{541}}{12}$인 원 위에 있다.

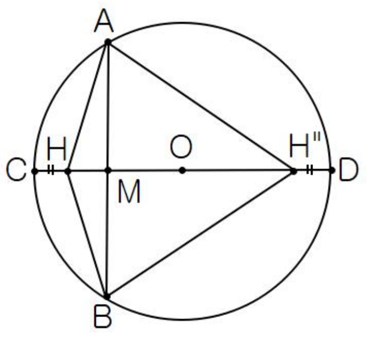
$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$의 최댓값은 $\overline{\mathrm{AQ}}+\frac{\sqrt{541}}{12}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}+\frac{\sqrt{541}}{12}=\frac{\sqrt{541}}{6}+\frac{\sqrt{541}}{12}=\frac{\sqrt{541}}{4}$

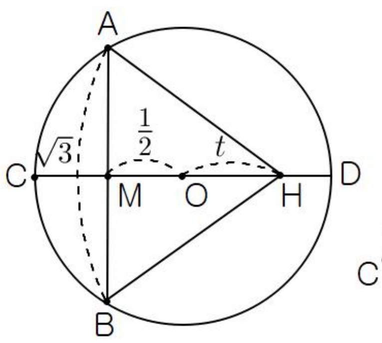
| 자연 계열 | 한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시<br>**모 의 논 술 예 시 답 안** | 2번 |
|---|---|---|

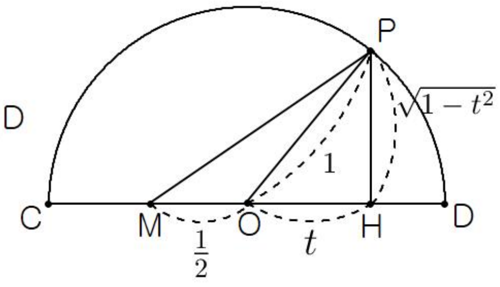
1. 점 H는 점 P의 평면 $\alpha$ 위로의 정사영이므로 점 P에서 평면 $\alpha$에 내린 수선의 발이다. 따라서 사면체의 부피는 $\frac{1}{3}\times$(삼각형 ABH의 넓이)$\times\overline{\mathrm{PH}}$이다. 현 AB와 수직인 원의 지름을 CD라 하자. 단, 현 AB와 지름 CD의 교점 M은 선분 CO위에 있다고 하자.

   먼저 사면체 ABPH의 부피가 최대이면 수선의 발 H는 적어도 지름 CD위에 있어야 한다. 만약 수선의 발 H가 지름 CD 위에 있지 않으면, 점 H를 지나고 현 AB와 평행한 직선과 지름 CD의 교점 H′이라 하고, H′을 수선의 발로 하는 구면 위의 점을 P′이라 할 때, 사면체 ABP′H′의 부피는 사면체 ABPH의 부피보다 크게 되어 모순이다 (아래 첫 번째 그림 참조).
   더욱이 수선의 발 H는 선분 OD위에 있어야 한다. 만약 수선의 발 H가 선분 CO위에 있다면, $\overline{\mathrm{DH''}}=\overline{\mathrm{CH}}$를 만족시키는 선분 OD위의 점을 H″이라 하고, 점 H″를 수선의 발로 하는 구면 위의 점을 P″이라 할 때, 사면체 ABP″H″의 부피는 사면체 ABPH의 부피보다 크게 되어 모순이다
   (아래 두 번째 그림 참조).










   이제 수선의 발 H는 선분 OD위에 있으므로, $\overline{\mathrm{OH}}=t$ (단, $0<t<1$)라 하고, 사면체의 부피를 $f(t)$라 하면

   $f(t)=\frac{1}{3}\times$(삼각형 ABH의 넓이)$\times\overline{\mathrm{PH}}$이므로, 위 세 번째, 네 번째 그림에서,

   $f(t)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{2}+t\right)\times\sqrt{1-t^2}=\frac{\sqrt{3}}{12}(2t+1)\sqrt{1-t^2}$ 이고

   $f'(t)=-\frac{\sqrt{3}(4t^2+t-2)}{12\sqrt{1-t^2}}=0$일 때, $t=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$이다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(t)$ | | ↗ | | ↘ | |

   오른쪽 변화표에서 사면체 ABPH의 부피 $f(t)$는 $t=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$일 때 최대임을 알 수 있다.

   이때 삼각형 ABH의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)=\frac{3}{16}(\sqrt{3}+\sqrt{11})$이다.

2. 양의 실수 $m$의 값과 상관없이 항상 $f(0)=0=g(0)$이므로, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $0<x\le 1$의 범위에서 만나지 않도록 하는 $m$의 범위를 구하면 된다. 다음과 같이 네 가지 경우로 나누어 조사해보자.

$0<m<1$: 이 경우 $0<x\le 1$일 때, $g(x)=1-\sqrt{1-x^2}\le x<\frac{1}{m}x^m=f(x)$이므로 두 곡선은 만나지 않는다.

$m=1$: 이 경우 $f(1)=1=g(1)$이므로 두 곡선은 점 $(1,1)$에서 만난다.

$1<m<2$: 이 경우 $0<x\le 1$일 때, $1-\frac{1}{m}x^m\ge 0$이므로

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{m}x^m \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^2=\left(1-\frac{1}{m}x^m\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2=-\frac{2}{m}x^m+\frac{1}{m^2}x^{2m} \quad \Leftrightarrow \quad x^{2m-1}-2mx^{m-1}+m^2x=0 \end{aligned}$$

이다. 함수 $h(x)=x^{2m-1}-2mx^{m-1}+m^2x$는 $h(0)=0$, $\lim_{x\to 0^+}h'(x)=-\infty$를 만족하므로 $h(a)<0$인 $a\in(0,1)$가 존재한다. 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a,1]$에서 연속이고 $h(a)<0<(m-1)^2=h(1)$이므로
사잇값 정리에 의해 $h(c)=0$인 $c$가 열린구간 $(a,1)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $0<x\le 1$의 범위에서 만난다.

$m\ge 2$: 이 경우 $0<x\le 1$일 때, $1-\frac{1}{m}x^m\ge 0$이므로

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{m}x^m \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^2=\left(1-\frac{1}{m}x^m\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2=-\frac{2}{m}x^m+\frac{1}{m^2}x^{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{m}x^{m-2}=1+\frac{1}{m^2}x^{2m-2} \end{aligned}$$

이다. 마지막 식의 좌변은 1보다 작거나 같고 우변은 1보다 크기 때문에 등식이 성립할 수 없으므로,
$0<x<1$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 만나지 않는다.

따라서, 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 한 점에서 만나도록 하는 양의 실수 $m$의 범위는 $0<m<1$, $m\ge 2$이다.

3. 정사면체 주사위 A와 정육면체 주사위 B를 함께 한 번 던지는 시행을 했을 때,
다음과 같은 경우의 수를 갖는다.

| 주사위 A | 1, 4 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 주사위 B | 3, 6 | 1, 2, 4, 5 | 3, 6 | 1, 2, 4, 5 | 3, 6 | 1, 2, 4, 5 |
| 점 P의 위치변화 | $+1+1=+2$ | $+1-2=-1$ | $-2+1=-1$ | $-2-2=-4$ | $+3+1=+4$ | $+3-2=+1$ |

주사위 A와 주사위 B의 눈이 나오는 사건은 독립사건이므로 각 확률의 곱을 통해 확률을 구할 수 있다.
주사위 A와 주사위 B를 함께 한 번 던지는 시행을 했을 때 점 P의 위치변화를 확률변수 $X$라고 하면,
확률분포는 다음과 같다.

| $X$ | $-4$ | $-1$ | $+1$ | $+2$ | $+4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{4}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{4}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{12}$ |

기댓값 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$\mathrm{E}(X)=(-4)\times\frac{1}{6}+(-1)\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{12}=-\frac{1}{4}$

정사면체 주사위 A와 정육면체 주사위 B를 함께 던지는 시행을 세 번 반복했을 때,

원점에서 시작한 점 P의 위치의 기댓값은 $\mathrm{E}(3X)$이므로 $\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=-\frac{3}{4}$이다.