한양대학교 2021학년도 논술전형

자 연 계 열 (오전)

성명		지원 학부·학과		수험 번호									

유의 사항

1. 90분 안에 답안을 작성하시오.
2. 답안지는 검정색 펜(샤프, 볼펜, 연필)으로 작성하시오.
3. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안지를 검정색 펜(샤프, 볼펜, 연필)으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 곡선 $y=e^x\,(0 \le x \le \ln t)$와 y축, 직선 $y=t$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 두 입체도형 A와 B가 있다. 도형 A는 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형이고, 도형 B는 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형이다. 도형 A의 부피를 $V(t)$, 도형 B의 부피를 $W(t)$라 할 때, 극한값 $\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\frac{W(t)}{V(t)}$를 구하시오.

2. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=(x+1)^{\frac{3}{2}}\,(-1 \le x \le t)$의 길이를 $l(t)$라 하고, 이 곡선 위의 점 $\left(t, (t+1)^{\frac{3}{2}}\right)$과 원점 사이의 거리를 $d(t)$라 하자. 이때 극한값 $\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{d(t)}$를 구하시오.

3. 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $n^2-12n+37$인 정사각형의 넓이를 a_n, 한 변의 길이가 $2n+1$인 정사각형의 넓이를 b_n이라고 하자. $\frac{a_n}{b_n}$이 최소가 되는 n을 구하고, 이때 $\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

1 이하의 모든 양의 실수 a, b, c와 $abcd=1$을 만족시키는 실수 d에 대하여 부등식

$$a+b+c+d+\frac{1}{abc+abd+acd+bcd} \geq M$$

을 만족시키는 양의 실수 M의 최댓값을 다음과 같이 구하고자 한다.

위 부등식을 아래와 같이 쓰자.

$$a+b+c+\frac{1}{abc}+\frac{1}{abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq M$$

$f(x)=a+b+x+\frac{1}{abx}+\frac{1}{abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}}$ (단, $0<x\leq 1$)이라 하면,

$$f'(x)=\frac{\boxed{\text{(ㄱ)}}}{x^2}\left\{\frac{1}{\left(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)^2}-\frac{1}{ab}\right\} \leq 0$$

이므로 $f(c)\geq f(1)$이 성립한다.

이번에는 $f(1)=g(b)$가 되도록 $g(x)=a+x+1+\frac{1}{ax}+\frac{1}{ax+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+1}$ (단, $0<x\leq 1$)이라 하면,

$g'(x)\leq 0$이므로 $g(b)\geq g(1)$이 성립한다.

마지막으로 $g(1)=h\left(a+\frac{1}{a}+2\right)$가 되는 $h(x)$를 생각하면……

(이하 생략)

1. 제시문의 (ㄱ)에 알맞은 수식을 쓰고 $f'(x)\leq 0$인 이유를 설명하시오.

2. 제시문에서 생략된 마지막 과정을 완성하여 M의 최댓값을 구하시오.

3. 다음 부등식을 만족시키는 양의 실수 K의 최댓값을 제시문과 동일한 방법으로 구하시오.

(단, 실수 a, b, c, d는 제시문과 동일한 조건을 만족한다.)

$$2(a+b+c+d)+\frac{17}{abc+abd+acd+bcd} \geq K$$