4. 자연Ⅱ

[문제 1] 좌표평면에 주어진 이차함수 $y=x^2+\frac{1}{4}$의 그래프 위의 임의의 점 P에 그은 접선이 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 점의 좌표를 각각 $\mathrm{Q}(a_1, b_1), \mathrm{R}(a_2, b_2)$라 할 때 다음 물음에 답하시오. [35점]

(1) $\mathrm{P}\left(0, \frac{1}{4}\right)$일 때, 접선과 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(2) $y=x^2+\frac{1}{4}$위의 임의의 점 P에 대하여 $|a_2-a_1|=1$임을 보이시오.

(3) $\overline{\mathrm{QR}}=7$일 때, 접선의 기울기를 구하시오.

(4) 자연수 k에 대하여 점 $\mathrm{P}\left(k, k^2+\frac{1}{4}\right)$에서 $y=x^2+\frac{1}{4}$에 대한 접선의 기울기를 m_k라고 하고 접선과 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_k라고 하자. 이때 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(m_k^2-24A_k)}$ 의 값을 구하시오.

■ 출제의도

이 문제는 이차함수의 성질을 이해하고 문제 풀이의 기초가 되는 이차함수의 접선의 변화를 유추하기 위해 제시된 함수의 상태를 분석하여 수학적으로 추론하여 적용하는 문제이다. 이 과정에서 이차함수의 그래프와 직선의 위치에 대한 수리적 이해, 정적분과 급수에 관한 계산능력을 점검한다. 또한, 이차방정식의 근과 계수와의 관계, 이차함수의 성질을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

■ 출제근거

수학, 황선욱 외, 미래엔: 이차방정식의 근과 계수와의 관계 (pp.61-65)
수학, 홍성복 외, 지학사: 이차방정식의 근과 계수와의 관계 (pp.60-63)
수학Ⅱ, 배종숙 외, 금성: 정적분 (pp.124-127)
수학Ⅱ, 김원경 외, 비상교육: 정적분 (pp.112-118)
수학, 배종숙 외, 금성: 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 (pp.71-73)
미적분, 고성은 외, 좋은책신사고: 급수 (pp.27-30)

■ 우수답안 및 해설

(1) $\mathrm{P}\left(0, \frac{1}{4}\right)$일 때, 접선과 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이: 점 $\mathrm{P}\left(0, \frac{1}{4}\right)$를 지나며 기울기가 m인 직선은 $y=mx+\frac{1}{4}$이다. 이 직선이 $y=x^2+\frac{1}{4}$의 접선일 때는 $x^2+\frac{1}{4}=mx+\frac{1}{4}$가 중근을 가질 때이므로 판별식 $D=m^2=0$에 따라 $m=0$이다.

따라서 접선은 $y=\frac{1}{4}$이고 구하는 도형의 넓이는 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)dx=\frac{1}{6}$이다.

※별해

$y=x^2+\frac{1}{4}$의 도함수 $y'=2x$이므로 그래프 위의 점 $\mathrm{P}\left(0, \frac{1}{4}\right)$에서 접선의 방정식은

$y=0\cdot(x-0)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$이다.

따라서 접선은 $y=\frac{1}{4}$이고 구하는 도형의 넓이는 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)dx=\frac{1}{6}$이다.

(2) $y=x^2+\frac{1}{4}$위의 임의의 점 P에 대하여 $|a_2-a_1|=1$임을 보이시오.

풀이: 임의의 점 $\mathrm{P}\left(t, t^2+\frac{1}{4}\right)$를 지나며 기울기가 m인 직선은 $y=m(x-t)+t^2+\frac{1}{4}$이다. 이 직선이 $y=x^2+\frac{1}{4}$의 접선일 때는 $x^2+\frac{1}{4}=m(x-t)+t^2+\frac{1}{4}$, 즉 $x^2-mx+mt-t^2=0$이 중근을 가질 때 이므로 $D=(m-2t)^2=0$ 이므로 $m=2t$이다. 따라서 접선은 $y=2t(x-t)+t^2+\frac{1}{4}$이다.

접선과 $y=x^2$가 만나는 점의 x좌표 a_1, a_2가 $x^2-2tx+t^2-\frac{1}{4}=0$의 근이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 $(a_2-a_1)^2=(a_2+a_1)^2-4a_2a_1=(2t)^2-4\left(t^2-\frac{1}{4}\right)=1$이고

$|a_2-a_1|=1$이다.

※별해

접선의 방정식이 $y-a_2^2=\frac{a_2^2-a_1^2}{a_2-a_1}(x-a_2)=(a_2+a_1)(x-a_2)$이므로 $y=(a_1+a_2)x-a_1a_2$이다.

따라서 $x^2+\frac{1}{4}=(a_1+a_2)x-a_1a_2$, 즉 $x^2-(a_1+a_2)x-\left(a_1a_2+\frac{1}{4}\right)=0$이 중근을 가지므로 판별식 조건으로부터

$$D=(a_1+a_2)^2-4\left(a_1a_2+\frac{1}{4}\right)=0 \Rightarrow (a_2-a_1)^2=1$$

이므로 $|a_2-a_1|=1$이다.

(3) $\overline{\mathrm{QR}}=7$일 때, 접선의 기울기를 구하시오.

풀이: $\overline{\mathrm{QR}}=7$이므로 $(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2=49=\overline{\mathrm{QR}}^2$이다.

따라서 문항 (2)로부터 $|a_2-a_1|=1$이므로 $|\, b_2-b_1\,|\ =\sqrt{48}$이다. 따라서 기울기는 $\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$이므로 구하는 직선의 기울기는 $4\sqrt{3}$ 또는 $-4\sqrt{3}$이다.

(4) 자연수 k에 대하여 점 $\mathrm{P}\left(k, k^2+\dfrac{1}{4}\right)$에서 $y=x^2+\dfrac{1}{4}$에 대한 접선의 기울기를 m_k라고 하고 접선과 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_k라고 하자. 이때 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(m_k^2-24A_k)}$의 값을 구하시오.

풀이: 점 $\mathrm{P}\left(k, k^2+\dfrac{1}{4}\right)$에서 $y=x^2+\dfrac{1}{4}$에 대한 접선은 기울기가 $2k$인 직선이므로 접선의 방정식은

$$y=2k(x-k)+k^2+\frac{1}{4}$$

이다. 이 직선과 $y=x^2$의 교점을 구하면, $x^2=2k(x-k)+k^2+\dfrac{1}{4}$의 해가 $x=k\pm\dfrac{1}{2}$이므로

$$\left(k-\frac{1}{2}, \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right), \left(k+\frac{1}{2}, \left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

이다.

따라서 접선과 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\left\{\left(2k(x-k)+k^2+\frac{1}{4}\right)-x^2\right\}dx$$

이다.

$$\begin{aligned}
&\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\left\{2kx-k^2+\frac{1}{4}-x^2\right\}dx \\
&=k\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}+\left(-k^2+\frac{1}{4}\right)\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)-\left(k-\frac{1}{2}\right)\right\}-\frac{1}{3}\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^3-\left(k-\frac{1}{2}\right)^3\right\} \\
&=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

이므로 k에 관계없이 일정하다. 따라서 $m_k=2k$ 이고 $A_k=\dfrac{1}{6}$이므로

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(m_k^2-24A_k)}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4k^2-4}=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k^2-1)}$$

이다. 이때 급수 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k^2-1)}$의 제 2항부터 제 k항까지의 부분합을 S_k이라고 하면

$$\frac{1}{(k^2-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

이므로

$$
\begin{aligned}
S_k &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}
$$

이고 $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(m_k^2-24A_k)}=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k^2-1)}=\frac{3}{16}$ 이다.

[문제 2] 무리수 $\sqrt{15}$에 대하여 다음이 성립할 때, 아래 물음에 답하시오. [35점]

a,b,c,d가 유리수일 때, $a=c$, $b=d$이면 $a+b\sqrt{15}=c+d\sqrt{15}$이다. 거꾸로 $a+b\sqrt{15}=c+d\sqrt{15}$이면, $a=c$, $b=d$이다.

(1) 정수 m,n에 대하여 함수 $f(x)=x^4+mx^2+n$라 할 때, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$가 $f(x)=0$의 근이 되는 m,n의 값을 구하시오.

(2) 문항 (1)에서 구한 m,n에 대하여 $x^4+mx^2+n=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

(3) 문항 (1)에서 구한 m,n에 대하여 $x^4+mx^2+n=0$의 실근이 모두 무리수임을 귀류법을 이용하여 보이시오.

(4) 위 문항으로부터 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$가 무리수임을 보이시오.

■ 출제의도

본 문제는 자연수와 유리수의 기본적인 성질을 이해하고 귀류법을 활용하여 주어진 문제의 결론을 수리적으로 추론하는 문제이다. 이 과정에서 제시된 조건을 통해 미지의 계수를 정하는 능력을 점검하고, 명제의 가정과 이미 알려진 성질, 조건 및 정의를 근거로 주어진 명제가 참임을 논리적으로 밝히는 수리적 증명 능력을 평가하고자 한다. 또한 다항함수의 미분, 증가와 감소 등의 수리적 개념을 효과적으로 활용하여 주어진 사차방정식의 근의 특성을 함수의 개형을 통해 판별하는 능력을 평가하고자 한다.

■ 출제근거

수학, 김원경 외, 비상교육: 항등식의 성질과 미정계수법 (pp.24-26), 명제의 조건 (pp.178-183),
명제의 증명 (pp.188-192, p.273)
수학, 황선우 외, 미래엔: 다항식과 항등식 (pp.26-27, p.44), 명제의 역과 대우, 귀류법 (pp.199-201)
수학, 홍성복 외, 지학사: 명제와 조건 (pp.193-197), 여러 가지 증명 (pp.203-205)
수학, 고성은 외, 좋은책 신사고: 근을 직접 대입하기 (p.55, p.80), 명제 사이의 관계 (pp.190-194)
수학 II, 김원경 외, 비상교육: 함수의 그래프 (pp.86-89), 방정식에의 활용 (pp.90-92)
수학II, 홍성복 외, 지학사: 함수의 그래프 (pp.90-92), 방정식에의 활용 (pp.94-96)
수학II, 고성은 외, 좋은책 신사고: 함수의 그래프 (pp.87-90), 방정식과 부등식에의 활용 (pp.93-96)

■ 우수답안 및 해설

(1) 정수 m,n에 대하여 함수 $f(x)=x^4+mx^2+n$라 할 때, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$가 $f(x)=0$의 근이 되는 m,n의 값을 구하시오.

풀이: $f(\sqrt{3}+\sqrt{5})=(\sqrt{3}+\sqrt{5})^4+m(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2+n=(8m+n+124)+(2m+32)\sqrt{15}=0$이므로 지문에 주어진 사실로부터 m,n에 관한 두 방정식 $8m+n+124=0$과 $2m+32=0$을 얻게 된다. 이 연립방정식을 풀면 $m=-16$이고 $n=4$이다.

(2) 문항 (1)에서 구한 m,n에 대하여 $x^4+mx^2+n=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

풀이: 방정식 $f(x)=x^4-16x^2+4=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다. 여기서 도함수 $y=f'(x)$를 통해 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 알아본다. 이때 $f'(x)=4x^3-32x=4x(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2\sqrt{2}, x=0$ 또는 $x=2\sqrt{2}$이다. $f'(x)$의 부호를 조사하여 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-60	$\nearrow$	4	$\searrow$	-60	$\nearrow$

따라서 실근이 4개의 구간 $(-\infty,-2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2},0)$, $(0,2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2},\infty)$에서 하나씩 존재한다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

(3) 문항 (1)에서 구한 m,n에 대하여 $x^4+mx^2+n=0$의 실근이 모두 무리수임을 귀류법을 이용하여 보이시오.

풀이: 문항 (2)로부터 $x^4-16x^2+4=0$의 근이 모두 실수이므로 근이 모두 무리수라는 결론을 부정하여 $x^4-16x^2+4=0$는 적어도 하나의 유리수인 근 α을 가진다고 가정한다. α와 $-\alpha$가 모두 $x^4-16x^2+4=0$의 근이 되므로 $\alpha=\dfrac{p}{q}$(p,q은 서로소인 자연수)로 나타낼 수 있다.

$x^4-16x^2+4=0$에 근 $\dfrac{p}{q}$을 대입한 후 양변을 q^4로 곱하여 정리하면

$$p^4=16p^2q^2-4q^4=4q^2(4p^2-q^2)$$

이다. 여기서 $4q^2(4p^2-q^2)$이 짝수이므로 p^4이 짝수이고 p도 짝수이다. 따라서 $p=2k$(k는 자연수)로 나타내면 $(2k)^4=4q^2(16k^2-q^2)$이고

$$4k^4=q^2(16k^2-q^2)$$

이다. 만약 q가 홀수이면 q^2와 $16k^2-q^2$이 모두 홀수가 되므로, 두 홀수의 곱 $q^2(16k^2-q^2)$은 다시 홀수가 되지만 $4k^4$가 짝수이므로 모순이다. 결국 q는 짝수이다. 그러면 p,q가 모두 짝수이므로 서로소인 자연수라는 가정의 모순이다. 귀류법에 따라서 $x^4-16x^2+4=0$는 모두 무리수인 근을 가진다.

※별해

방정식 $x^4-16x^2+4=0$는 적어도 하나의 유리수인 근 α을 가진다고 가정한다. 이때 α^2은 유리수이고 방정식 $t^2-16t+4=0$의 근이 된다. 이 이차방정식의 근이 $8\pm2\sqrt{15}$이므로 α^2은 $8\pm2\sqrt{15}$ 중 하나가 된다. $8\pm2\sqrt{15}$가 무리수이므로 α^2이 유리수인 가정에 모순이다. 귀류법 따라서 $x^4-16x^2+4=0$는 모두 무리수인 근을 가진다.

(4) 위 문항으로부터 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$가 무리수임을 보이시오.

풀이: 문항 (1)에 의하여 $x^4-16x^2+4=0$은 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$을 근으로 가진다. 문항 (2)에 따라서 $x^4-16x^2+4=0$은 서로 다른 4개의 실근을 가지므로 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$는 실수임을 알 수 있다. 문항 (3)의 결과로부터 $x^4-16x^2+4=0$은 항상 무리수인 근을 가진다. 따라서 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$는 $x^4-16x^2+4=0$의 실근이므로 무리수이다.

[문제 3] 좌표평면의 원 $x^2+y^2=1$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 중심이 y축에 있고 원 $x^2+y^2=1$과 한 점에서 만나며 직선 $y=2x$에 접하는 원의 방정식을 모두 구하시오.

(2) 문항 (1)에서 구한 원은 모두 직선 $y=-2x$에 접함을 보이시오.

(3) 중심이 x축 또는 y축에 있고 원 $x^2+y^2=1$과 한 점에서 만나며 직선 $y=2x$에 접하는 원에 대하여 반지름의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

■ 출제의도

본 문제는 좌표평면의 원과 직선의 관계로 주어진 문제를 이해하고, 주어진 조건에 대한 수리적 추론을 바탕으로 풀이를 기획하고 수행할 수 있는 수리적 문제 해결 능력을 평가하는 문제이다. 이 과정에서 직선과 점의 거리, 원과 직선의 위치 관계, 실수의 성질에 관한 수리 개념의 이해와 종합적 활용 능력, 그리고 문제 해결에 필요한 수리적 정보 수집을 위한 효율적 계산의 설계와 수행에 관한 계산 능력의 수월성을 평가한다.

■ 출제근거

수학, 김원경 외, 비상교육, 두 점 사이의 거리 (pp.99-101), 점과 직선사이의 거리 (pp.118-122), 원의 방정식 (pp.125-130), 원과 직선의 위치 관계 (pp.131-136)

■ 우수답안 및 해설

(1) 중심이 y축에 있고 원 $x^2+y^2=1$과 한 점에서 만나며 직선 $y=2x$에 접하는 원의 방정식을 모두 구하시오.

풀이: 구하는 원의 중심을 $(0,a)$라고 두면 이 점이 원 $x^2+y^2=1$의 밖에 있거나 안에 있을 수 있다. 원의 중심이 원의 밖에 있을 때 반지름의 길이는 $|a|-1$이고 원의 안에 있을 때 반지름의 길이가 $1-|a|$이다.

반지름의 길이가 $|a|-1$일때 직선 $y-2x=0$과 점 $(0,a)$의 거리도 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|a-2\cdot 0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=|a|-1$$

이다. 이 식을 계산하면 $|a|=\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}$이다. 반지름의 길이가 $1-|a|$일 때 직선 $y-2x=0$과 점 $(0,a)$의 거리도 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|a-2\cdot 0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1-|a|$$

이다. 이 식을 계산하면 $|a|=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은 모두

$$x^2+\left(y-\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2,\ x^2+\left(y+\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$x^2+\left(y-\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2,\ x^2+\left(y+\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

이다.

(2) 문항 (1)에서 구한 원은 모두 직선 $y=-2x$에 접함을 보이시오.

풀이: 문항 (1)에서 구한 원의 중심과 직선 $y+2x=0$의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으면 원이 직선 $y+2x=0$에 접한다.

원 $x^2+\left(y-\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$의 중심 $\left(0,\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$와 직선 $y+2x=0$의 거리는 $\dfrac{\left|\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}+2\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$이다. 이 거리는 반지름의 길이 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$와 같으므로 원과 직선이 접한다. 마찬가지로 원 $x^2+\left(y+\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$의 중심 $\left(0,-\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$와 직선 $y+2x=0$의 거리도 $\dfrac{\left|-\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}+2\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$이다. 이 거리 또한 반지름의 길이 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$와 같으므로 원과 직선이 접한다.

원 $x^2+\left(y-\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$의 중심 $\left(0,\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\right)$와 직선 $y+2x=0$의 거리는

$\dfrac{\left|\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}+2\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 이다. 이 거리는 반지름의 길이 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 와 같으므로 원과 직선이 접한다. 마찬가지로 원 $x^2+\left(y+\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$ 의 중심 $\left(0,-\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\right)$ 와 직선 $y+2x=0$ 의 거리도 $\dfrac{\left|-\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}+2\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 이다. 이 거리 또한 반지름의 길이 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 와 같으므로 원과 직선이 접한다.

※ 별해

문항 (1)에서 구한 원은 모두 중심이 y축에 있으므로 y축에 대하여 대칭이다. 직선 $y=2x$를 y축에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=-2x$이다. 문항(1)에서 구한 원이 각각 직선 $y=2x$와 한 점에서 만나므로 y축에 대하여 대칭이동한 직선 $y=-2x$와 각각 한 점에서 만난다. 따라서 문항(1)에서 구한 원은 모두 직선 $y=-2x$에 접한다.

(3) 중심이 x축 또는 y축에 있고 원 $x^2+y^2=1$과 한 점에서 만나며 직선 $y=2x$에 접하는 모든 원에 대하여 반지름의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

풀이: 원의 중심이 y축에 있는 경우 원의 반지름은 문항 (1)에서 모두 구하여 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 이다.

중심이 x축에 있는 원의 중심을 $(b,0)$ 라고 하자. 이 점이 원 $x^2+y^2=1$ 밖에 있으면 구하는 원의 반지름의 길이는 $|b|-1$이고 원 안에 있으면 원의 반지름의 길이는 $1-|b|$이다. 직선 $y-2x=0$과 점 $(b,0)$의 거리도 원의 반지름의 길이와 같으므로 구하는 중심이 원 밖에 있을 때

$$\frac{|0-2\cdot b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=|b|-1$$

이다. 이 식을 계산하면 $|b|=5+2\sqrt{5}$이다. 따라서 중심이 x축에 있고 원 $x^2+y^2=1$ 밖에서 조건을 만족하는 원의 반지름의 길이는 $4+2\sqrt{5}$이다. 마찬가지로 구하는 원의 중심이 원 안에 있을 때

$$\frac{|0-2\cdot b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1-|b|$$

이다. 이 식을 계산하면 $|b|=5-2\sqrt{5}$이다. 따라서 중심이 x축에 있고 원 $x^2+y^2=1$ 안에서 조건을 만족하는 원은 반지름의 길이가 $-4+2\sqrt{5}$이다.

이제 조건을 만족하는 원들의 반지름의 길이의 크기를 모두 비교하면

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} < -4+2\sqrt{5} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 4+2\sqrt{5}$$

이다. 따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $(4+2\sqrt{5})+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{15+9\sqrt{5}}{4}$ 이다.