2024학년도 수시 모의논술고사

논술고사 문제지 (자연계열 II)

소속고교		수험번호		성 명	

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

감독확인

이 화 여 자 대 학 교

1 좌표평면에 주어진 이차함수 $y=x^2+\frac{1}{4}$의 그래프 위의 임의의 점 P에 그은 접선이 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 만나는 점의 좌표를 각각 $\mathrm{Q}(a_1,b_1),\mathrm{R}(a_2,b_2)$라 할 때 다음 물음에 답하시오. [35점]

(1) $\mathrm{P}\left(0,\frac{1}{4}\right)$일 때, 접선과 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(2) $y=x^2+\frac{1}{4}$위의 임의의 점 P에 대하여 $|a_2-a_1|=1$임을 보이시오.

(3) $\overline{\mathrm{QR}}=7$일 때, 접선의 기울기를 구하시오.

(4) 자연수 k에 대하여 점 $\mathrm{P}\left(k,k^2+\frac{1}{4}\right)$에서 $y=x^2+\frac{1}{4}$에 대한 접선의 기울기를 m_k라고 하고 접선과 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_k라고 하자. 이때 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(m_k^2-24A_k)}$ 의 값을 구하시오.

2 무리수 $\sqrt{15}$에 대하여 다음이 성립할 때, 아래 물음에 답하시오. [35점]

> a,b,c,d가 유리수일 때, $a=c,\ b=d$이면 $a+b\sqrt{15}=c+d\sqrt{15}$이다.
> 거꾸로 $a+b\sqrt{15}=c+d\sqrt{15}$이면, $a=c,\ b=d$이다.

(1) 정수 m,n에 대하여 함수 $f(x)=x^4+mx^2+n$라 할 때, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$가 $f(x)=0$의 근이 되는 m,n의 값을 구하시오.

(2) 문항 (1)에서 구한 m,n에 대하여 $x^4+mx^2+n=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

(3) 문항 (1)에서 구한 m,n에 대하여 $x^4+mx^2+n=0$의 실근이 모두 무리수임을 귀류법을 이용하여 보이시오.

(4) 위 문항으로부터 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$가 무리수임을 보이시오.

3 좌표평면의 원 $x^2+y^2=1$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 중심이 y축에 있고 원 $x^2+y^2=1$과 한 점에서 만나며 직선 $y=2x$에 접하는 원의 방정식을 모두 구하시오.

(2) 문항 (1)에서 구한 원은 모두 직선 $y=-2x$에 접함을 보이시오.

(3) 중심이 x축 또는 y축에 있고 원 $x^2+y^2=1$과 한 점에서 만나며 직선 $y=2x$에 접하는 모든 원에 대하여 반지름의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.