논술고사 출제 의도 및 답안 (자연계열)

문항 1

[문항 1] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2n \le x < 2n+2$일 때, $f(x) = 1 - |x-2n-1|$이다. (단, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$이다.)
(나) $x < 0$일 때, $f(x) = 0$이다.

닫힌구간 $[2n, 2n+2]$에서 직선 $y = ax\ (0 < a < 1)$와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 한다. 아래 물음에 답하시오. [40점]

(1) S_0을 구하시오.

(2) 닫힌구간 $[2n, 2n+2]$에서 직선 $y = ax$와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하고 S_n을 구하시오.

(3) 실수 a에 대하여 직선 $y = ax$와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[2n, 2n+2]$에서 두 점에서 만나고 닫힌구간 $[2n+2, 2n+4]$에서는 한 점에서 만나거나 만나지 않는 자연수 n의 값의 범위를 a로 나타내고 극한값 $\lim_{a \to 0+} na$를 구하시오.

(4) 문항 (3)에서 구한 자연수 n의 값의 범위에 대하여 극한값 $\lim_{a \to 0+} \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$을 구하시오.

문항 1 - 출제 의도

이 문제는 주어진 함수들에 의해 결정되는 도형을 파악하고, 해당하는 도형의 넓이를 구하고 관련된 극한값을 구하는 문제이다. 함수들에 의해 결정되는 도형을 추론하고 점과 직선 사이의 거리 등의 간단한 수리적 도구를 활용하여 도형의 넓이를 구하고 관련된 극한값을 구할 수 있는 수리적 조작 능력을 평가한다. 또한 주어진 함수들의 조건을 만족시키는 범위를 결정하고 극한의 대소 관계를 활용하여 결과를 도출할 수 있는 수리적 추론 능력을 평가한다.

1-(1). 주어진 함수의 그래프를 이해하고 주어진 구간에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 도형을 유추하여 넓이를 구할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

1-(2). 주어진 구간에서 직선과 함수의 그래프가 두 점에서 만날 조건을 유추할 수 있는 추론 능력과 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

1-(3). 주어진 구간에서 직선과 함수의 그래프가 두 점에서 만나도록 하는 자연수의 범

위를 유추하는 추론 능력과 관련된 극한값을 구할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.
1-(4). 수열의 합을 구하고 앞선 문항들에서 파악된 결과들과 극한의 성질들을 활용하여 극한값을 구할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

문항 1 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[수학] - (4) 함수 - ① 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
1-(1)	**[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식** [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
1-(2)	**[수학] - (4) 함수 - ① 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. **[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식** [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
1-(3)	**[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한** [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
1-(4)	**[수학 I] - (3) 수열 - ② 수열의 합** [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한** [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	133-135
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	231-234
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2022	142, 145-147
	수학 I	황선욱 외	미래엔	2022	145, 147-149
	수학 II	김원경 외	비상교육	2022	19-20, 23-24
	수학 II	박교식 외	동아출판	2022	20-24
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2022	15-18
	미적분	홍성복 외	지학사	2022	17-20

문항 1 -문항 해설

주어진 함수들에 의해 결정되는 도형을 파악하기 위해서 함수의 그래프를 이해하고 기하학적 조건을 수리적 조작을 통해 대수적 관계식으로 유추하여 활용하는 방법은 매우 유용한 추론 방법이다. 함수의 그래프들로 둘러싸인 도형이 교점들에 의해 결정될 때, 교점들을 파악하고 해당 교점들의 상태를 대수적 관계식으로 표현하도록 요구되는 문항이다. 또한 함수의 그래프들로 둘러싸인 도형의 넓이에 의해 결정되는 수열을 파악하고 극한값을 구하도록 하고 있다. 이 과정에서 극한에 대한 기본 성질과 극한의 대소 관계를 활용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는 수리적 계산능력을 평가하고 있다.

문항 1 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	S_0을 구하시오.	7점
	두 교점 $(0,0), \left(\dfrac{2}{1+a}, \dfrac{2a}{1+a}\right)$를 구함.	2점
	둘러싸인 도형이 $(0,0), \left(\dfrac{2}{1+a}, \dfrac{2a}{1+a}\right), (1,1)$이 꼭짓점인 삼각형임을 결정함.	1점
	두 교점 $(0,0), \left(\dfrac{2}{1+a}, \dfrac{2a}{1+a}\right)$ 사이의 거리 $\dfrac{2\sqrt{1+a^2}}{1+a}$을 구함.	1점
	점 $(1,1)$과 직선 $y=ax$ 사이의 거리 $\dfrac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$를 구함.	2점
	삼각형의 넓이 $S_0 = \dfrac{1-a}{1+a}$를 구함.	1점
1-(2)	닫힌구간 $[2n, 2n+2]$에서 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하고 S_n을 구하시오.	9점
	점 $(2n+1, 1)$이 직선보다 위쪽에 있음을 지적하고 범위 $0<a<\dfrac{1}{2n+1}$을 구함.	3점
	두 교점 $\left(\dfrac{2n}{1-a}, \dfrac{2na}{1-a}\right), \left(\dfrac{2(n+1)}{1+a}, \dfrac{2(n+1)a}{1+a}\right)$를 구함.	2점
	두 교점 $\left(\dfrac{2n}{1-a}, \dfrac{2na}{1-a}\right), \left(\dfrac{2(n+1)}{1+a}, \dfrac{2(n+1)a}{1+a}\right)$ 사이의 거리 $\dfrac{2\sqrt{1+a^2}(1-a-2na)}{1-a^2}$를 구함.	1점

하위 문항	채점 기준	배점
	점 $(2n+1,1)$과 직선 $y=ax$ 사이의 거리 $\dfrac{1-(2n+1)a}{\sqrt{1+a^2}}$를 구함.	2점
	삼각형의 넓이 $S_n=\dfrac{(1-a-2na)^2}{1-a^2}$을 구함.	1점
1-(3)	실수 a에 대하여 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[2n,2n+2]$에서 두 점에서 만나고 닫힌구간 $[2n+2,2n+4]$에서는 한 점에서 만나거나 만나지 않는 자연수 n의 값의 범위를 a로 나타내고 극한값 $\lim\limits_{a\to0+}na$를 구하시오.	11점
	닫힌구간 $[2n,2n+2]$에서 두 점에서 만나기 위한 n의 조건이 $n<\dfrac{1-a}{2a}$임을 구함.	1점
	자연수 n의 값의 범위 $\dfrac{1-3a}{2a}\le n<\dfrac{1-a}{2a}$를 구함.	4점
	자연수 n의 값의 범위 $\dfrac{1-3a}{2a}\le n<\dfrac{1-a}{2a}$로부터 $1-3a\le 2na<1-a$를 얻음.	3점
	극한값 $\lim\limits_{a\to0+}na=\dfrac{1}{2}$을 구함.	3점
1-(4)	문항 (3)에서 구한 자연수 n의 값의 범위에 대하여 극한값 $\lim\limits_{a\to0+}\dfrac{1}{n}(S_0+S_1+\cdots S_n)$을 구하시오.	13점
	$\dfrac{1-3a}{2a}\le n<\dfrac{1-a}{2a}$일 때 모든 $k=0,1,2,\cdots,n$에 대하여 교점이 두 점임을 지적함.	3점
	문항 (2)의 결과를 인용하여 $k=0,1,2,\cdots,n$에 대하여 $S_k=\dfrac{(1-a-2ka)^2}{1-a^2}$임을 보임.	2점
	$\dfrac{1}{n}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$을 구함.	3점
	$\dfrac{1-3a}{2a}\le n<\dfrac{1-a}{2a}$를 인용하여 $\lim\limits_{a\to0+}\dfrac{1}{n}=0$을 얻음.	2점

하위 문항	채점 기준	배점
	극한값 $\lim_{a\to 0+}\frac{1}{n}(S_0+S_1+\cdots S_n)=\frac{1}{3}$을 얻음.	3점

문항 1 - 예시 답안

1-(1) S_0을 구하시오.

[풀이]

구간 $[0,2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[0,1]$에서는 $y=x$이고 구간 $[1,2]$에서는 $y=2-x$이다. 그러므로 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점은 각각 $y=ax$와 $y=x$의 교점 $(0,0)$과 $y=ax$와 $y=2-x$의 교점 $\left(\frac{2}{1+a},\frac{2a}{1+a}\right)$이다. 따라서 구간 $[0,2]$에서 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 두 교점 $(0,0),\left(\frac{2}{1+a},\frac{2a}{1+a}\right)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,1)$이 이루는 삼각형이다.

두 교점 사이의 거리는 $\frac{2\sqrt{1+a^2}}{1+a}$이고, 점 $(1,1)$로부터 직선 $y=ax$에 이르는 거리는

$$\frac{|1-a\cdot 1|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}\ (0<a<1)$$

이므로

$$S_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+a^2}}{1+a}\cdot\frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1-a}{1+a}$$

이다.

1-(2) 닫힌구간 $[2n,2n+2]$에서 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하고 S_n을 구하시오.

[풀이]

구간 $[2n,2n+2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[2n,2n+1]$에서는 $y=x-2n$이고, 구간 $[2n+1,2n+2]$에서는 $y=2n+2-x$이다. 따라서 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[2n,2n+2]$에서 두 점에서 만나려면 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2n+1,1)$이 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있어야 한다.

즉

$$a(2n+1) < 1$$

이다. 따라서 a의 값의 범위는

$$0 < a < \frac{1}{2n+1}$$

이다.

이때 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 교점은 각각 구간 $[2n, 2n+1]$에서 $y=x-2n$과 $y=ax$의 교점, 그리고 구간 $[2n+1, 2n+2]$에서 $y=2n+2-x$와 $y=ax$의 교점이다. 따라서

$$ax = x-2n \ \ (2n \le x < 2n+1), \quad ax = 2n+2-x \ \ (2n+1 \le x \le 2n+2)$$

를 만족시킨다. 따라서 두 교점은

$$\left(\frac{2n}{1-a}, \frac{2na}{1-a}\right), \quad \left(\frac{2(n+1)}{1+a}, \frac{2(n+1)a}{1+a}\right)$$

이다.

두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{2(n+1)}{1+a} - \frac{2n}{1-a}\right)^2 + \left(\frac{2(n+1)a}{1+a} - \frac{2na}{1-a}\right)^2} = \frac{2\sqrt{1+a^2}\,(1-a-2na)}{1-a^2}$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2n+1, 1)$로부터 직선 $y=ax$에 이르는 거리가

$$\frac{|1-a(2n+1)|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1-(2n+1)a}{\sqrt{1+a^2}} \quad \left(0 < a < \frac{1}{2n+1}\right)$$

이므로

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{1+a^2}\,(1-a-2na)}{1-a^2} \cdot \frac{1-(2n+1)a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{(1-a-2na)^2}{1-a^2}$$

이다.

1-(3) 실수 a에 대하여 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[2n, 2n+2]$에서 두 점에서 만나고 닫힌구간 $[2n+2, 2n+4]$에서는 한 점에서 만나거나 만나지 않는 자연수 n의 값의 범위를 a로 나타내고 극한값 $\lim\limits_{a \to 0+} na$를 구하시오.

[풀이]

문항 (2)의 결과로부터 $0 < a < \dfrac{1}{2n+1}$일 때, 구간 $[2n, 2n+2]$에서 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점에서 만나므로 자연수 n은

$$n < \frac{1-a}{2a}$$

를 만족한다.

한편 구간 $[2n+2, 2n+4]$에서 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 한 점에서만 만나거나 만나지 않으려면 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2n+3, 1)$이 직선 $y=ax$ 위의 점이거나 직선보다 아래쪽에 있다. 즉

$$a(2n+3) \geq 1$$

이다. 따라서 자연수 n은

$$n \geq \frac{1-3a}{2a}$$

를 만족한다.

위 결과로부터 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[2n, 2n+2]$에서 두 점에서 만나고 구간 $[2n+2, 2n+4]$에서는 한 점에서 만나거나 만나지 않는 자연수 n의 값의 범위는

$$\frac{1-3a}{2a} \leq n < \frac{1-a}{2a}$$

이다.

자연수 n의 값의 범위가 $\frac{1-3a}{2a} \leq n < \frac{1-a}{2a}$이므로 $1-3a \leq 2na < 1-a$이다. 따라서 $\lim_{a \to 0+} na = \frac{1}{2}$이다.

1-(4) 문항 (3)에서 구한 자연수 n의 값의 범위에 대하여 극한값 $\lim_{a \to 0+} \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$을 구하시오.

[풀이]

문항 (3)의 결과로부터 자연수 n의 값의 범위가 $\frac{1-3a}{2a} \leq n < \frac{1-a}{2a}$일 때 구간 $[2n, 2n+2]$에서 직선 $y=ax$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점에서 만난다. 이때 모든 $k=0, 1, 2, \cdots, n$에 대하여

$$S_k = \frac{(1-a-2ka)^2}{1-a^2} = \frac{1}{1-a^2}\left(4a^2k^2 - 4a(1-a)k + (1-a)^2\right)$$

이다. 따라서

$$\frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$$

$$= \frac{1}{(1-a^2)n} \sum_{k=0}^{n} \left(4a^2k^2 - 4a(1-a)k + (1-a)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(1-a^2)n}\left(\frac{4a^2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4a(1-a)n(n+1)}{2} + (1-a)^2(n+1)\right)$$

$$= \frac{n+1}{(1-a^2)n}\left(\frac{2a^2n(2n+1)}{3} - 2a(1-a)n + (1-a)^2\right)$$

$$= \frac{n+1}{(1-a^2)n}\left(\frac{4a^2n^2}{3} + \frac{2(4a-3)an}{3} + (1-a)^2\right)$$

이다. 한편 $\frac{1-3a}{2a} \le n < \frac{1-a}{2a}$이므로 $\frac{2a}{1-a} < \frac{1}{n} \le \frac{2a}{1-3a}$를 얻는다. 따라서 $\lim_{a\to 0+}\frac{1}{n} = 0$이다. 또한 문항 (3)의 결과로부터 $\lim_{a\to 0+} na = \frac{1}{2}$이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0+}\frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n) &= \lim_{a\to 0+}\frac{n+1}{(1-a^2)n}\left(\frac{4a^2n^2}{3} + \frac{2(4a-3)an}{3} + (1-a)^2\right) \\ &= \lim_{a\to 0+}\frac{1}{1-a^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{4}{3}(na)^2 + \frac{2(4a-3)}{3}(na) + (1-a)^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

이다.

문항 2

[문항 2] 실수 m, b에 대하여 직선 $y=mx+b$가 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때 아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) $m=1$일 때 위 조건을 만족하는 b의 값을 모두 구하시오.

(2) $m \geq 0$, $b>0$일 때 위 조건을 만족하는 m의 값의 범위를 구하고 b를 m으로 나타내시오.

(3) $m \geq 0$, $b>0$일 때 직선 $y=mx+b$와 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프의 세 교점을 x좌표의 크기순으로 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$라 하자. 교점 A와 B사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 교점 B와 C사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같아지는 실수 b의 값을 모두 구하시오.

문항 2 - 출제 의도

이 문제는 이차함수로부터 유도된 함수의 그래프와 직선의 교점에 관한 조건을 수리적 조작을 통해 파악하고 교점의 개수와 교점을 특정하는 직선의 위치를 추론하는 문제이다. 주어진 조건에 관한 함수와 직선의 위치 관계를 판별하는 수리적 추론 능력을 평가한다. 그리고 이차방정식의 판별식을 활용하여 직선과 주어진 함수의 그래프가 접하는 상황을 판별하고 해당하는 도형의 넓이를 비교 판정하는 능력을 평가한다.

2-(1). 좌표평면에서 절댓값 기호를 포함한 이차함수의 그래프가 주어지고 기울기가 정해진 직선의 y절편을 따라 움직일 때 교점의 개수의 변화를 판별하는 능력을 평가한다.

2-(2). 절댓값 기호를 포함한 이차함수와 직선이 3개의 점에서 만나려면 접해야 한다는 사고의 과정과 그때의 직선의 범위를 구하는 능력을 평가하고, 이차방정식의 판별식을 활용하여 구체적인 상황을 조사하는 능력을 평가한다.

2-(3). 그래프의 개형을 파악하여 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 판별하는 능력을 평가한다.

문항 2 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
2-(1)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수** [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.

2-(2)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수** [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. **[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
2-(3)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수** [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. **[수학II] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용** [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2022	58-60, 71-72, 152-160
	수학	권오남 외	교학사	2022	51-53, 63-64, 143-154
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2021	48-50, 62-63, 146-153
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	58-60, 72-73, 153-161, 231-234
	수학II	김원경 외	비상교육	2022	125-131
	수학II	류희찬 외	천재교과서	2022	131-139
	수학II	고성은 외	좋은책신사고	2022	133-137

문항 2 - 문항 해설

문항 2-(1). 좌표평면에서 절댓값 기호를 포함한 이차함수의 그래프가 주어지고 기울기가 정해진 직선의 y절편을 따라 움직일 때, 교점의 개수의 변화를 판별하는 능력을 평가한다. 절댓값 기호를 포함한 이차함수와 직선의 교점은 접할 때뿐만 아니라 직선이 절댓값 부호 안의 함숫값이 0이 되는 점을 지날 때 교점의 개수 변화를 면밀히 관찰하여야 한다.

문항 2-(2). 절댓값 기호를 포함한 이차함수와 직선이 3개의 점에서 만나려면 접해야 한다는 사고의 과정과 그때의 직선의 범위를 구하는 능력을 평가하고, 이차방정식의 판별식을 활용하여 구체적인 상황을 조사하는 능력을 평가한다. 직선이 이차함수의 절댓값 부호 안의 함수 값이 0이 되는 점을 지날 때 교점의 개수가 변화하는데, 주어진 조건에서 이 상황이 발생하지 않음을 확인한다. 그러므로 접할 때의 교점을 구하면 되는 사실을 확인하고 계산해 가는 과정을 평가한다.

문항 2-(3). 그래프의 개형을 파악하여 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 판별하는 능력을 평가한다. 문항 (2)의 결과로부터 3개의 교점이 발생하는 경우는 직선과 이차곡선이 접할 때이고, 이때 둘러싸인 도형의 개형이 대칭인 경우만 교점 A와 B사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 교점 B와 C사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 같아짐을 도형의 모양과 수식을 확인하여 보일 수 있다.

문항 2 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	$m=1$일 때 위 조건을 만족하는 b의 값을 모두 구하시오.	10점
	직선 $y=x+b$를 y축을 따라 평행이동하면 직선이 $b=0$이거나 $0<x<2$에서 함수의 그래프에 접할 때만 세 점에서 만남을 보임. 또는 그림 등을 통하여 두 가지 경우만 세 점에서 만남을 보임.	3점
	$b=0$일 때 직선과 그래프가 세 점에서 만남을 기술함.	3점
	접할 때 이차방정식의 판별식 또는 미분을 이용하여 교점의 개수가 세 개가 되고, 이때 $b=\frac{1}{4}$임을 구함.	4점
	※ 그림을 그려 조건을 만족하는 b의 값이 두 개임을 보여도 무방함.	
2-(2)	$m\ge 0,\ b>0$일 때 위 조건을 만족하는 m의 값의 범위를 구하고 b를 m으로 나타내시오.	10점
	$m\ge 0,\ b>0$의 조건으로부터 직선 $y=mx+b$는 점 $(0,0)$, $(2,0)$을 지날 수 없음을 언급함.	2점
	세 점에서 만나는 경우는 직선이 $0<x<2$에서 $y=-x(x-2)$의 그래프에 접할 때임을 언급함.	1점

하위 문항	채점 기준	배점
	$0<x<2$에서 $y=-x(x-2)$의 그래프에 접할 때 교점의 개수가 세 개이므로 m의 값의 범위가 $0 \le m < 2$임을 보임.	3점
	이차방정식의 판별식으로부터 그래프와 직선이 접하는 경우 $b=\frac{1}{4}(m-2)^2$을 만족함을 보임.	4점
2-(3)	$m \ge 0,\ b>0$일 때 직선 $y=mx+b$와 함수 $y=\lvert x(x-2)\rvert$의 그래프의 세 교점을 x좌표의 크기순으로 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$라 하자. 교점 A와 B사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 교점 B와 C사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같아지는 실수 b의 값을 모두 구하시오.	10점
	$m \ge 0,\ b>0$에서, 또는 문항 (2)로부터 접할 때만 직선과 그래프의 교점이 세 개임을 언급함.	1점
	$b=1$일 때, 직선과 그래프로 둘러싸인 두 도형은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 그래프로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같음을 보임.	2점
	$b=1$이 아닌 경우, 두 부분의 넓이가 같을 수 없음을 언급함.	2점
	$b=1$이 아닌 경우, $1-\sqrt{2} \le x \le 1,\ 1 \le x \le 1+\sqrt{2}$에서의 둘러싸인 도형의 넓이 비교 등을 통해 두 부분의 넓이가 같을 수 없음을 증명함.	5점
	※ 그래프의 개형을 그림으로 기술하거나 수식으로 설명하고 대소 비교를 통해 증명한 경우에도 답으로 인정함. ($b=1$이 아닌 경우, 두 부분의 넓이가 같을 수 없음을 언급만 하면 2점, 증명까지 완성하면 7점을 부여함.)	

문항 2 - 예시 답안

2-(1) $m=1$일 때 위 조건을 만족하는 b의 값을 모두 구하시오.

[풀이]

직선 $y=x+b$를 y축을 따라 평행이동하면 $b=-2$일 때 함수 $y=\lvert x(x-2)\rvert$의 그래프와 한 점에서 만나고 $-2<b<0$일 때 두 점에서 만난다. 그리고 $b=0$일 때 세 점에서 만난다.

$b>0$이면 직선이 $0<x<2$에서 함수의 그래프에 접할 때만 세 점에서 만난다. 직선 $y=x+b$와 $y=-x(x-2)$가 접하면 $-x^2+2x=x+b$가 중근을 가지므로 판별식 $D=1-4b=0$이다.

즉, $b=\frac{1}{4}$일 때 직선과 함수의 그래프가 세 점에서 만난다.

따라서 구하는 값은 $b=0,\ \frac{1}{4}$이다.

2-(2) $m \ge 0$, $b > 0$일 때 위 조건을 만족하는 m의 값의 범위를 구하고 b를 m으로 나타내시오.

[풀이]

$m \ge 0$, $b > 0$일 때 직선 $y = mx + b$는 점 $(0,0)$, $(2,0)$을 지날 수 없다. 따라서 직선이 함수 $y = |x(x-2)|$의 그래프와 세 점에서 만나는 경우는 직선이 $0 < x < 2$에서 $y = -x(x-2)$의 그래프에 접할 때이다. 따라서 이차방정식 $-x^2 + 2x = mx + b$가 중근을 갖고, 중근이 $0 < x < 2$에 있다. 판별식 $D = (m-2)^2 - 4b = 0$이므로 $b = \frac{1}{4}(m-2)^2$이고, 중근 $1 - \frac{m}{2}$은 $0 < 1 - \frac{m}{2} < 2$를 만족시키므로 $0 \le m < 2$이다.

그러므로 $0 \le m < 2$일 때 $b = \frac{1}{4}(m-2)^2$이다.

2-(3) $m \ge 0$, $b > 0$일 때 직선 $y = mx + b$와 함수 $y = |x(x-2)|$의 그래프의 세 교점을 x좌표의 크기순으로 A, B, C라 하자. 교점 A와 B사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 교점 B와 C사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같아지는 실수 b의 값을 모두 구하시오.

[풀이]

문항 (2)의 결과로부터 직선 $y = mx + b$와 함수 $y = |x(x-2)|$의 그래프가 세 점에서 만날 때는 직선과 함수의 그래프가 접할 때이고, $b = \frac{1}{4}(m-2)^2$ $(0 \le m < 2)$이므로 $0 < b \le 1$이다.

직선 $y = mx + b$와 함수 $y = |x(x-2)|$의 그래프의 세 교점이 x좌표의 크기순으로 A, B, C이라고 했으므로 직선 $y = mx + b$와 함수 $y = x(x-2)$의 그래프의 교점을 $\mathrm{A}(\alpha, m\alpha + b)$, $\mathrm{C}(\beta, m\beta + b)$, $\alpha < \beta$라 하고 접점을 $\mathrm{B}(p, q)$라 하자. 그리고 교점 A와 B사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 교점 B와 C사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.

(i) $b = 1$일 때, 직선 $y = 1$이 $y = -x(x-2)$의 그래프에 접하고 직선과 함수 $y = |x(x-2)|$의 그래프로 둘러싸인 두 도형은 $y = -x(x-2)$의 대칭축 $x = 1$에 대하여 대칭이다. 따라서 직선 $y = 1$과 함수 $y = |x(x-2)|$의 그래프로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같다.

이때 직선 $y = 1$과 $y = x(x-2)$의 교점은 $(1 - \sqrt{2}, 1)$, $(1 + \sqrt{2}, 1)$이다.

(ii) $0 < b < 1$일 때, 직선 $y = mx + b$와 $y = x(x-2)$가 $x = \alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$에서 만나고 $m > 0$이므로 $1 - \sqrt{2} < \alpha < 0$, $1 + \sqrt{2} < \beta$이다. 직선 $y = mx + b$와 함수

$y=-x(x-2)$의 그래프가 $x=p$에서 접하고 $m>0$이므로 $0<p<1$이다. 따라서 $1-\sqrt{2}<\alpha<p<1$이고 $p<1<1+\sqrt{2}$이다.

$1-\sqrt{2}<\alpha<p<1$이므로 $\alpha \le x \le p$에서 직선 $y=mx+b$와 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프로 둘러싸인 도형은 $1-\sqrt{2} \le x \le 1$에서 직선 $y=1$과 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프로 둘러싸인 도형에 포함되고 같지 않다. 따라서 $1-\sqrt{2} \le x \le 1$에서 직선 $y=1$과 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_0이라고 하면 $\alpha \le x \le p$에서 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은 S_0보다 작고 같지 않다.

$p<1<1+\sqrt{2}<\beta$이므로 $p \le x \le \beta$에서 직선 $y=mx+b$와 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프로 둘러싸인 도형은 $1 \le x \le 1+\sqrt{2}$에서 직선 $y=1$과 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프로 둘러싸인 도형을 포함하고 같지 않다. 따라서 $1 \le x \le 1+\sqrt{2}$에서 직선 $y=1$과 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_0{}'$이라고 하면, $p \le x \le \beta$에서 둘러싸인 도형의 넓이 S_2는 $S_0{}'$보다 크고 같지 않다. (ⅰ)의 결과로부터 $S_1 < S_0 = S_0{}' < S_2$이다.

(ⅰ), (ⅱ)로부터 넓이가 같아지는 경우는 $b=1$일 때뿐이다.

문항 3

[문항 3] 좌표평면 위에서 원 $x^2+y^2=1$의 내부를 색칠하여 얻게 되는 그림을 P_0이라 하자. P_0에 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 내부를 색칠한 부분을 더하여 얻게 되는 그림을 P_1이라 하고 P_1에 원 $(x-2)^2+y^2=1$과 원 $(x+2)^2+y^2=1$의 내부를 색칠한 부분을 더하여 얻게 되는 그림을 P_2라 한다. 이 과정을 계속하여 P_n에 원 $(x-n-1)^2+y^2=1$과 원 $(x+n+1)^2+y^2=1$의 내부를 색칠한 부분을 더하여 얻게 되는 그림을 P_{n+1}이라 한다. P_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 하자. (단, $n=0,1,2,3,\cdots$이다.)
한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이를 α라 하고, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴에서 호의 양 끝 점과 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 제외한 도형의 넓이를 β라 할 때 아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) S_0을 $a_0\alpha+b_0\beta$로 나타낼 때 자연수 a_0, b_0을 구하시오.

(2) S_1을 $a_1\alpha+b_1\beta$로 나타낼 때 자연수 a_1, b_1을 구하시오.

(3) S_{2023}을 $a_{2023}\alpha+b_{2023}\beta$로 나타낼 때 자연수 a_{2023}, b_{2023}을 구하시오.

문항 3 - 출제 의도

이 문제는 원에 관한 도형들로 제시된 조건을 이해하고 수리적 분석과정을 통하여 제시된 조건의 넓이를 구하는 문제이다. 이 과정에서 그림에 대한 수리적 조작, 다항식의 연산, 등차수열을 활용하여 그림의 넓이를 구하는 수리적 조작 능력을 평가한다.

3-(1). 정삼각형과 부채꼴에 관한 도형으로 원의 내부를 분할하여 원의 넓이를 정삼각형의 넓이와 부채꼴에 관한 도형의 넓이의 합으로 나타내는 수리적 추론능력과 수리적 조작 능력을 평가한다.

3-(2). 원의 평행이동에 관한 개념을 활용하여 원에 관한 도형으로 제시된 조건을 조작적으로 활용하여 그림의 개형을 이해하고, 수리적 분석과정을 통하여 그림의 넓이를 정삼각형의 넓이와 부채꼴에 관한 도형의 넓이의 합으로 나타내는 수리적 추론능력과 수리적 조작 능력을 평가한다.

3-(3). 원의 평행이동에 관한 개념을 활용하여 원에 관한 도형으로 제시된 조건을 이해하고, 등차수열을 활용하여 그림의 넓이를 정삼각형의 넓이와 부채꼴에 관한 도형의 넓이의 합으로 나타내는 종합적 수리적 능력을 평가한다.

문항 3 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식** [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. **[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수** [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
3-(1)	**[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수** [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
3-(2)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 1 다항식의 연산** [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. **[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수** [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
3-(3)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 1 다항식의 연산** [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동** [10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. **[수학 I] - (3) 수열 - 1 등차수열과 등비수열** [12수학 I 03-01] 수열의 뜻을 안다. [12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2022	10-19, 126-130, 141-143
	수학	황선욱 외	미래엔	2021	16-20, 139-142, 153-155
	수학 I	김원경 외	비상교육	2022	65-70, 117-126
	수학 I	황선욱 외	미래엔	2022	69-73, 121-129

문항 3 - 문항 해설

이 문제는 원으로 제시된 조건을 분석적으로 이해하고 이를 바탕으로 원에 대한 수리적 조작을 수행하여 제시된 그림의 개형을 이해하고 정삼각형과 부채꼴에 관한 도형을 활용하는 수리적 추론과 조작을 통해 그림의 넓이를 구하는 문제이다. 제시된 그림이 정삼각형과 부채꼴에 관한 도형으로 분할되는 것을 추론하고, 이를 바탕으로 정삼각형의 넓이와 부채꼴에 관한 도형의 넓이를 문자로 활용하여 그림을 넓이를 이들의 문자의 합으로 나타내도록 하는 수리적 능력을 평가한다. 이 과정에서 등차수열을 발견하고 구하는 수리적 추론과 조작능력을 평가한다.

문항 3 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	S_0을 $a_0\alpha+b_0\beta$로 나타낼 때 자연수 a_0, b_0을 구하시오.	8점
	문제에서 제시된 넓이 β인 도형을 [그림1]로 나타냄. (또는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형을 뺀 것으로 서술함.)	2점
	그림 P_0은 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원임을 서술함.	1점
	그림 P_0은 [그림2]와 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 6개와 제시된 넓이 β인 도형 6개로 분할됨을 기술함.	4점
	그림 P_0의 넓이 S_0은 $6\alpha+6\beta$이고 구하는 자연수는 $a_0=6$, $b_0=6$임을 얻음.	1점
3-(1) 별해	S_0을 $a_0\alpha+b_0\beta$로 나타낼 때 자연수 a_0, b_0을 구하시오.	8점
	한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이를 계산하여 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$을 구함.	2점
	제시된 넓이 β인 도형의 넓이는 $\beta=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$임을 구함.	3점
	P_0의 넓이 π를 구함.	1점
	$\pi=6\alpha+6\beta$이므로 구하는 자연수는 $a_0=6$, $b_0=6$을 구함.	2점
3-(2)	S_1을 $a_1\alpha+b_1\beta$로 나타낼 때 자연수 a_1, b_1을 구하시오.	12점

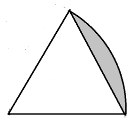
하위 문항	채점 기준	배점
	그림 P_1은 [그림3]과 같이, 그림 P_0에 [그림4]와 같이 나타나는 도형 두 개를 더한 것임을 서술함.	3점
	타당한 방법으로 [그림4]의 도형의 넓이가 $4\alpha+2\beta$임을 구함.	6점
	넓이 S_1은 $(6\alpha+6\beta)+2(4\alpha+2\beta)=14\alpha+10\beta$이고, $a_1=14,\ b_1=10$임을 구함.	3점
3-(2) 별해	S_1을 $a_1\alpha+b_1\beta$로 나타낼 때 자연수 $a_1,\ b_1$을 구하시오.	12점
	그림 P_1은 [그림3]과 같이 그림 P_0에 [그림4]와 같이 나타나는 도형 두 개를 더한 것임을 서술함.	3점
	타당한 방법으로 [그림4]의 도형의 넓이 $\pi-2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$을 구함.	5점
	[그림4]의 도형의 넓이를 활용하여 그림 P_1의 넓이 S_1가 $14\alpha+10\beta$이고, $a_1=14,\ b_1=10$임을 구함.	4점
3-(3)	S_{2023}을 $a_{2023}\alpha+b_{2023}\beta$로 나타낼 때 자연수 $a_{2023},\ b_{2023}$을 구하시오.	10점
	자연수 n에 대하여 그림 P_n의 넓이 S_n과 그림 P_{n-1}의 넓이 S_{n-1}의 차가 $8\alpha+4\beta$임을 설명함.	2점
	a_n이 첫째항 $a_1=14$이고 공차가 8인 등차수열이므로 $a_n=8n+6$임을 보임.	3점
	b_n이 첫째항 $b_1=10$이고 공차가 4인 등차수열이므로 $b_n=4n+6$임을 보임	3점
	$n=2023$을 대입하여 $a_{2023}=16190,\ b_{2023}=8098$을 구함.	2점

문항 3 - 예시 답안

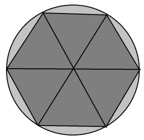
3-(1) S_0을 $a_0\alpha+b_0\beta$로 나타낼 때 자연수 $a_0,\ b_0$을 구하시오.

[풀이]

문제에서 제시된 넓이 β인 도형은 [그림1]과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형을 뺀 것이다.



[그림1]



[그림2]

그림 P_0은 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타내므로 그림 P_0에 색칠한 부분은 [그림2]와 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 6개와 제시된 넓이 β인 도형 6개로 분할된다. 따라서 그림 P_0의 넓이 S_0은 $6\alpha+6\beta$이므로 구하는 자연수는 $a_0=6$, $b_0=6$이다.

[별해]

한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$이다. 문제에서 제시된 넓이 β인 도형은 [그림1]과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형을 뺀 것이고 부채꼴의 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$이므로 $\beta=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$이다.

그림 P_0은 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타내므로 P_0의 넓이 S_0이 π이고

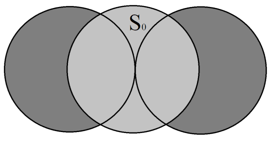
$$\pi=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+6\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=6\alpha+6\beta$$

이다. 따라서 구하는 자연수는 $a_0=6$, $b_0=6$이다.

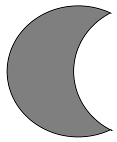
3-(2) S_1을 $a_1\alpha+b_1\beta$로 나타낼 때 자연수 a_1, b_1을 구하시오.

[풀이]

그림 P_1은 [그림3]과 같이, 그림 P_0에 [그림4]와 같이 나타나는 도형 두 개를 더한 것이다.



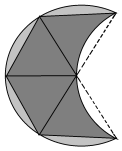
[그림3]

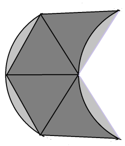


[그림4]

[그림4]의 도형은 [그림5]와 같이 분할되고, [그림6]처럼 넓이 β인 도형을 이동하면 [그림4]의 도형의 넓이는 [그림6]의 도형의 넓이와 같다. 따라서 [그림4]의 도형의 넓이

는 한 변의 길이가 1인 정삼각형 4개의 넓이와 제시된 넓이 β인 도형 2개의 넓이의 합이다. 그러므로 [그림4]의 도형의 넓이를 $4\alpha+2\beta$로 나타낼 수 있다.

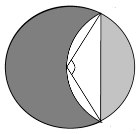

[그림5]


[그림6]

문항 (1)의 결과에 따라 S_0이 $6\alpha+6\beta$이므로 그림 P_1의 색칠한 부분의 넓이 S_1은 $(6\alpha+6\beta)+2(4\alpha+2\beta)=14\alpha+10\beta$이다. 따라서 구하는 자연수는 $a_1=14,\ b_1=10$이다.

[별해]

그림 P_1은 [그림3]과 같이 그림 P_0에 [그림4]와 같이 나타나는 도형 두 개를 더한 것이다. [그림4]의 도형은 아래 [그림7]과 같이 반지름의 길이가 1인 원에서, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2\pi}{3}$인 부채꼴에서 호의 끝점과 중심을 연결한 삼각형을 뺀 도형의 넓이를 두 개 뺀 것이다.


[그림7]

부채꼴에서 삼각형을 뺀 도형의 넓이가

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

이므로 [그림4]의 도형의 넓이는

$$\pi-2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=2\beta+4\alpha$$

로 쓸 수 있다. 문항 (1)의 결과에 따라 S_0이 $6\alpha+6\beta$이므로 그림 P_1의 색칠한 부분의 넓이 S_1은 $(6\alpha+6\beta)+2(4\alpha+2\beta)=14\alpha+10\beta$이다. 따라서 구하는 자연수는 $a_1=14, b_1=10$이다.

3-(3) S_{2023}을 $a_{2023}\alpha+b_{2023}\beta$로 나타낼 때 자연수 a_{2023}, b_{2023}을 구하시오.

[풀이]

자연수 n에 대하여 그림 P_n은 그림 P_{n-1}에 문항 (2)의 [그림4]와 같이 나타나는 도형 두 개를 더한 것이다. 그러므로 그림 P_n의 넓이 S_n과 그림 P_{n-1}의 넓이 S_{n-1}의 차

는 문항 (2)의 결과에 따라 $8\alpha+4\beta$이다. 따라서 a_n이 첫째항 $a_1=14$이고 공차가 8인 등차수열이므로

$$a_n=14+8(n-1)=8n+6$$

이다. 마찬가지로 b_n이 첫째항 $b_1=10$이고 공차가 4인 등차수열이므로

$$b_n=10+4(n-1)=4n+6$$

이다. $n=2023$을 대입하면 구하는 자연수는 $a_{2023}=16190$, $b_{2023}=8098$이다.