논술고사 출제 의도 및 답안 (자연계열)

문항 1

[문항 1] 상수 $p(1 < p < 2)$에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - px^2 + px$가 있다. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

을 만족시킨다. $0 < a_1 < 1$일 때, 아래 물음에 답하시오. [40점]

(1) $0 < x < \beta$에서 부등식 $f(x) > x$가 성립하고, $\beta < x < 1$에서 부등식 $f(x) < x$가 성립하는 β를 구하시오.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $0 < a_n < 1$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) 문항 (1)에서 정해진 β에 대하여 $a_1 \neq \beta$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $0 < a_n < \beta$가 성립하거나, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\beta < a_n < 1$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(4) 문항 (1)에서 정해진 β에 대하여 $a_1 \neq \beta$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{n+1} > a_n$이 성립하거나, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{n+1} < a_n$이 성립함을 보이시오.

문항 1 - 출제 의도

이 문제는 함수와 관련하여 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 수리적 추론을 통해 주어진 수열의 성질들을 증명하는 문제이다. 함수의 미분을 통해 함수의 증가 상태 및 함수의 성질을 분석할 수 있고 이를 함수와 관련하여 귀납적으로 정의된 수열에 적용할 수 있는 수리적 조작 능력을 평가한다. 또한 이 과정에서 수학적 귀납법을 활용하여 수열의 성질을 추론하는 능력을 평가한다.

1-(1). 삼차방정식의 해를 구하고 삼차함수의 그래프의 활용을 통해 구간에서의 부등식을 유추할 수 있는 수리적 추론능력을 평가한다.

1-(2). 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하기 위해 관련된 함수의 미분을 통한 증가 상태를 분석할 수 있는 추론능력과 함수의 상태를 수열에 적용하여 수열의 성질을 유추하기 위해 수학적 귀납법을 활용하는 수리적 추론능력을 평가한다.

1-(3). 함수와 관련하여 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하기 위해 함수의 상태를 활용하고 수열의 성질과 관련된 함수의 상태를 연관하여 이해하는 추론능력을 평가한다.

1-(4). 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 점검하기 위해 앞선 문항들에서 파악된 수열의 성질들과 관련된 함수의 성질들을 종합적으로 활용하여 수리적 추론능력을 평가한다.

문항 1 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1-(1)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. **[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학II02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
1-(2)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. **[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. **[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학II02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
1-(3)	**[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. **[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학II02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
1-(4)	**[수학 I] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법** [12수학 I 03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. **[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학II02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2021	63-65, 76-78
	수학	류희찬 외	천재교과서	2021	64-67, 75-77
	수학 I	박교식 외	동아출판	2021	139-144
	수학 I	김원경 외	비상교육	2021	145-150
	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2020	83-85, 93-95, 98-101
	수학 II	황선욱 외	미래엔	2021	82-97

문항 1 -문항 해설

수학적 귀납법은 수열의 여러 가지 성질을 증명하는 데 있어서 매우 유용한 추론 방법이다. 함수와 관련하여 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 점검하기 위하여 주어진 함수의 증가 상태 및 함수의 성질을 활용하는 문항이다. 함수의 미분을 활용해 증가 상태 등을 점검하고 방정식의 근을 통해 함수의 성질을 점검한다. 또한 점검한 함수의 성질을 귀납적으로 정의된 수열에 적용함으로써 수열의 성질을 수학적 귀납법으로 추론할 수 있는 능력을 평가하는 문항이다.

문항 1 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	$0<x<\beta$에서 부등식 $f(x)>x$가 성립하고, $\beta<x<1$에서 부등식 $f(x)<x$가 성립하는 β를 구하시오.	6점
	방정식 $g(x)=f(x)-x=0$을 설정함.	1점
	$g(x)=x(x-1)(x-p+1)$로 인수분해하여 근 $x=0,1,p-1$를 구함.	2점
	$0<p-1<1$임을 언급함.	1점
	$0<x<p-1$에서 $f(x)>x$임과 $p-1<x<1$에서 $f(x)<x$임을 보임.	2점
1-(2)	모든 자연수 n에 대하여 부등식 $0<a_n<1$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.	15점
	$n=1$일 때 $0<a_1<1$임을 언급함.	2점
	$n=k$일 때 $0<a_k<1$임을 가정함.	2점
	$f'(x)=3x^2-2px+p$임을 보임.	1점
	$3x^2-2px+p=0$의 판별식을 이용하여 $1<p<2$에서 $D<0$임을 보임.	2점
	$f'(x)=3x^2-2px+p>0$임을 보이고 함수 $f(x)$가 증가함을 주장함.	2점
	$f(0)=0,\ f(1)=1$임을 언급함.	1점
	앞의 근거들을 기반으로 $0<x<1$일 때 $0<f(x)<1$임을 주장함.	2점
	가정 $0<a_k<1$을 언급하고 $0<f(a_k)<1$임을 주장함.	1점
	$0<f(a_k)<1$임을 근거로 $0<a_{k+1}<1$임을 주장함.	1점
	수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $0<a_n<1$이 성립함을 기술함.	1점

하위 문항	채점 기준	배점
1-(3)	문항 (1)에서 정해진 β에 대하여 $a_1 \neq \beta$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $0 < a_n < \beta$가 성립하거나, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\beta < a_n < 1$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.	11점
	$n=1$일 때 $0 < a_1 < \beta$임을 언급함.	1점
	$n=k$일 때 $0 < a_k < \beta$를 가정함.	1점
	문항 (2)의 결과를 인용하여 $f(x)$가 증가함을 보임.	2점
	$f(x)$의 증가와 $f(0)=0$, $f(\beta)=\beta$를 인용하여 $0 < a_{k+1} < \beta$를 보임.	2점
	수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < \beta$이 성립함을 기술함.	1점
	$n=1$일 때 $\beta < a_1 < 1$임을 언급함.	1점
	$n=k$일 때 $\beta < a_k < 1$을 가정함.	1점
	$f(x)$의 증가와 $f(\beta)=\beta$, $f(1)=1$을 인용하여 $\beta < a_{k+1} < 1$을 보임.	2점
1-(4)	문항 (1)에서 정해진 β에 대하여 $a_1 \neq \beta$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{n+1} > a_n$이 성립하거나, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{n+1} < a_n$이 성립함을 보이시오.	8점
	$0 < a_1 < \beta$인 경우, 문항 (3)의 결과를 인용하여 $0 < a_n < \beta$임을 활용함.	2점
	문항 (1)의 결과를 인용하여 $0 < x < \beta$이면 $f(x) > x$임을 활용하여 $f(a_n) > a_n$를 보임.	1점
	$a_{n+1} = f(a_n) > a_n$을 보임.	1점
	$\beta < a_1 < 1$인 경우, 문항 (3)의 결과를 인용하여 $\beta < a_n < 1$임을 활용함.	2점
	문항 (1)의 결과를 인용하여 $\beta < x < 1$이면 $f(x) < x$임을 활용하여 $f(a_n) < a_n$를 보임.	1점
	$a_{n+1} = f(a_n) < a_n$을 보임.	1점

문항 1 - 예시 답안

1-(1) $0 < x < \beta$에서 부등식 $f(x) > x$가 성립하고, $\beta < x < 1$에서 부등식 $f(x) < x$가 성립하는 β를 구하시오.

[풀이]

함수 $g(x)$를 $g(x) = f(x) - x$라고 하자.

$g(x) = x^3 - px^2 + (p-1)x = x(x-1)(x-p+1)$

이므로 $g(x) = 0$의 근은 $x = 0, 1, p-1$이고 $1 < p < 2$이므로 $0 < p-1 < 1$이다.

최고차 항의 계수가 양수이고 삼차방정식이 서로 다른 세 근을 갖는 삼차함수의 그래프의 성질에 의해 $0 < x < p-1$에서 $g(x) > 0$이고, $p-1 < x < 1$에서 $g(x) < 0$이다. 따라서 $0 < x < p-1$에서 $f(x) > x$이고 $p-1 < x < 1$에서 $f(x) < x$이다.

따라서 구하는 β는 $p-1$이다.

1-(2) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $0 < a_n < 1$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

[풀이]

$n = 1$일 때, $0 < a_1 < 1$이다.

$n = k$일 때, $0 < a_k < 1$을 가정하자. $a_{k+1} = f(a_k)$이므로 $0 < f(a_k) < 1$을 보이면 $0 < a_{k+1} < 1$이 성립한다. $f'(x) = 3x^2 - 2px + p$이다.

이차방정식 $3x^2 - 2px + p = 0$의 판별식을 이용하면 $D/4 = p^2 - 3p = p(p-3)$이 $1 < p < 2$에서 $D/4 < 0$이므로 $f'(x) = 3x^2 - 2px + p > 0$이다. 따라서 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$이므로 $0 < x < 1$일 때, $0 < f(x) < 1$이다. $0 < a_k < 1$이므로 $0 < f(a_k) = a_{k+1} < 1$이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < 1$이 성립한다.

1-(3) 문항 (1)에서 정해진 β에 대하여 $a_1 \neq \beta$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $0 < a_n < \beta$가 성립하거나, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\beta < a_n < 1$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

[풀이]

문항 (1)의 결과로부터 $\beta = p-1$이고 $0 < a_1 < \beta$인 경우와 $\beta < a_1 < 1$인 경우로 나누어 수열의 부등식이 성립함을 보인다.

(i) $0 < a_1 < \beta$인 경우

$n = 1$일 때, $0 < a_1 < \beta$가 성립한다.

$n = k$일 때, $0 < a_k < \beta$를 가정하자. 문항 (2)의 풀이로부터 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하므로 $f(0) < f(a_k) < f(\beta)$이다. $f(0) = 0$, $f(\beta) = \beta$이므로 $0 < a_{k+1} < \beta$이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < \beta$이다.

(ii) $\beta < a_1 < 1$인 경우

$n = 1$일 때, $\beta < a_1 < 1$이 성립한다.

$n = k$일 때, $\beta < a_k < 1$을 가정하자. 문항 (2)의 풀이로부터 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하므로 $f(\beta) < f(a_k) < f(1)$이다. $f(\beta) = \beta$, $f(1) = 1$이므로 $\beta < a_{k+1} < 1$이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $\beta < a_n < 1$이다.

1-(4) 문항 (1)에서 정해진 β에 대하여 $a_1 \neq \beta$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{n+1} > a_n$이 성립하거나, 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $a_{n+1} < a_n$이 성립함을 보이시오.

[풀이]

문항 (3)과 마찬가지로 $0 < a_1 < \beta$인 경우와 $\beta < a_1 < 1$인 경우로 나누어 수열의 부등식이 성립함을 보인다.

(i) $0 < a_1 < \beta$인 경우

문항 (3)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < \beta$이다.

문항 (1)의 결과로부터 $0 < x < \beta$이면 $f(x) > x$이므로 $f(a_n) > a_n$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = f(a_n) > a_n$이 성립한다.

(ii) $\beta < a_1 < 1$인 경우

문항 (3)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $\beta < a_n < 1$이다.

문항 (1)의 결과로부터 $\beta < x < 1$이면 $f(x) < x$이므로 $f(a_n) < a_n$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = f(a_n) < a_n$이 성립한다.

문항 2

[문항 2] 아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) 좌표평면에서 타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

(2) 타원 $x^2+3y^2=3$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 1이고, 점 P의 x좌표는 양수이다. 타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점 Q, R에서 만날 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(k)$라 하자. $f(k)$를 구하시오.

(3) 문항 (1)에 해당하는 실수 k에 대하여 $\{f(k)\}^2$의 최댓값을 구하시오.

문항 2 - 출제 의도

이 문제는 좌표평면에서 이차곡선과 직선의 위치 관계 및 이차곡선과 직선이 만나는 교점의 좌표를 구하는 과정에 대한 이해를 점검하고, 이차곡선의 접선 및 점과 직선 사이의 거리 등의 개념을 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 효율적으로 계산하는 능력을 평가한다. 또한 도함수를 활용하여 다항함수의 최댓값을 구하는 과정에 대한 이해와 계산 능력을 평가한다.

문항 2 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
2-(1)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. **[수학] - (1) 문자와 식 - 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. **[기하] - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선** [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.
2-(2)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. **[수학] - (1) 문자와 식 - 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-13] 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - 2 직선의 방정식** [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. **[기하]- (1) 이차곡선 - 1 이차곡선** [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.
2-(3)	**[수학] - (1) 문자와 식 - 6 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. **[수학II] - (2) 미분 - 2 도함수** [12수학 II 02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[수학II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2020	58-65, 79-85, 98-101, 111-113, 135-137
	수학	김원경 외	비상교육	2021	49-54, 71-75, 82-87, 99-101, 120-122
	수학 II	박교식 외	동아출판	2021	62-67, 81-96
	수학 II	홍성복 외	지학사	2021	62-69, 83-92
	기하	이준열 외	천재교육	2021	18-24, 39-40, 42-46
	기하	권오남 외	교학사	2021	20-25, 35-49

문항 2 - 문항 해설

문항 2-(1). 좌표평면에서 이차곡선과 직선이 주어져 있을 때, 이차곡선과 직선의 방정식을 연립하여 얻어지는 이차방정식의 판별식의 부호를 이용하여 이차곡선과 직선의 위치관계를 알아내는 과정에 대한 이해와 계산 능력을 평가한다.

문항 2-(2). 이차곡선의 접선 중 주어진 값을 기울기로 가지는 접선과 그 접점을 구할 수 있는지 점검한다. 이차곡선과 직선이 두 점에서 만날 때, 두 교점의 좌표 혹은 두 교점 사이의 거리를 구하는 과정에 대한 이해와 계산 능력을 평가한다. 이때 교점들의 좌표를 직접 구해서 점과 점 사이의 거리 개념을 사용할 수도 있고, 이차방정식의 근의 차를 이차방정식의 계수를 이용하여 표현할 수도 있다. 점과 직선 사이의 거리 등의 개념을 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 삼각형의 넓이를 밑변의 길이와 높이를 사용해서 구할 수도 있고, 다른 방법을 이용하여 구해도 무방하다.

문항 2-(3). 구간에서 주어진 다항함수의 도함수를 계산하고 이를 활용하여 함수의 증가 및 감소를 조사하고, 이를 통해 함수의 최댓값을 구하는 과정에 대한 이해와 계산 능력을 평가한다. 이 문제에서의 도함수는 인수분해를 통하여 구간별로 부호가 어떻게 바뀌는지 조사할 수 있다. 이를 통해 주어진 함수가 구간별로 증가하는지 혹은 감소하는지를 관찰하여 최댓값을 구할 수 있다.

문항 2 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	좌표평면에서 타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.	8점
	두 식 $x^2+3y^2=3$과 $y=x+k$를 연립하여 이차방정식 $4x^2+6kx+3(k^2-1)=0$을 얻어 냄.	2점
	타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이 이차방정식 $4x^2+6kx+3(k^2-1)=0$의 판별식이 양수여야 함을 관찰함.	3점
	판별식을 잘 계산하여 $D=12(4-k^2)$를 얻고, 따라서 답이 $-2<k<2$임을 얻어 냄.	3점
	※ $k=\pm 2$일 때 접한다는 사실을 발견하여 답 $-2<k<2$를 얻어도 무방함.	
2-(2)	타원 $x^2+3y^2=3$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 1이고, 점 P의 x좌표는 양수이다. 타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점 Q, R에서 만날 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(k)$라 하자. $f(k)$를 구하시오.	12점

하위 문항	채점 기준	배점
	문항 (1)에서의 판별식 $D=0$이어야 한다는 조건을 사용하여, 점 P의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$임을 얻어 내거나 점 P에서의 접선이 $y=x-2$임을 얻음.	4점
	이차방정식 $4x^2+6kx+3(k^2-1)=0$을 풀어서 점 Q, R의 좌표들 $\left(\frac{-3k\pm\sqrt{3(4-k^2)}}{4}, \frac{k\pm\sqrt{3(4-k^2)}}{4}\right)$을 구하거나 이차방정식 $4x^2+6kx+3(k^2-1)=0$의 두 근의 차를 계산하여 선분 QR의 길이 $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3(4-k^2)}}{2}$을 구함.	4점
	점 P와 직선 $y=x+k$ 사이의 거리 $\frac{\mid 2+k \mid}{\sqrt{2}}$를 이용하거나 혹은 다른 방법을 통하여 삼각형 PQR의 넓이 $f(k)=\frac{\sqrt{3(4-k^2)}(2+k)}{4}$(단, $-2<k<2$)를 구함.	4점
2-(3)	문항 (1)에 해당하는 실수 k에 대하여 $\{f(k)\}^2$의 최댓값을 구하시오.	10점
	$\{f(k)\}^2=\frac{3}{16}(4-k^2)(2+k)^2$의 도함수를 고려하고 계산함.	2점
	$\{f(k)\}^2$의 도함수를 $\frac{3}{4}(2+k)^2(1-k)$ 형태로 인수분해하는 등의 방법을 통해 $\{f(k)\}^2$의 도함수가 $-2<k<1$에서 양수이고 $1<k<2$에서 음수임을 관찰함.	3점
	$\{f(k)\}^2$의 도함수의 부호를 통하여 함수 $\{f(k)\}^2$이 $-2<k<1$에서 증가하고 $1<k<2$에서 감소함을 관찰하고, 따라서 $k=1$에서 최댓값을 가진다는 사실을 얻어 냄.	3점
	최댓값 $\frac{81}{16}$을 구함.	2점

문항 2 - 예시 답안

2-(1) 좌표평면에서 타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

[풀이]

식 $y=x+k$를 $x^2+3y^2=3$에 대입하면 $x^2+3(x+k)^2=3$이고,

$$4x^2+6kx+3(k^2-1)=0$$

을 얻는다. 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D가 양수여야 한다.

$$D/4 = 9k^2 - 4 \cdot 3(k^2-1) = -3k^2 + 12 = 3(4-k^2) > 0$$

이므로 $4-k^2 > 0$이다.

따라서 구하는 답은 $-2 < k < 2$이다.

2-(2) 타원 $x^2+3y^2=3$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 1이고, 점 P의 x좌표는 양수이다. 타원 $x^2+3y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점 Q, R에서 만날 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(k)$라 하자. $f(k)$를 구하시오.

[풀이]

문항 (1)의 풀이에서 직선 $y=x+k$가 타원 $x^2+3y^2=3$에 접할 때는 $D=0$일 때이다. 따라서 $k=\pm 2$이고, 이때 이차방정식

$$4x^2+6kx+3(k^2-1) = 4x^2 \pm 12x + 9 = (2x \pm 3)^2 = 0$$

의 근은 $x = \mp \frac{3}{2}$이다.

이 중 양수인 경우는 $k=-2$일 때 $x=\frac{3}{2}$이며, 이때 $y=x+k=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 P의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이다.

$-2<k<2$일 때 두 점 Q, R의 x좌표의 차는 이차방정식 $4x^2+6kx+3(k^2-1)=0$의 두 근의 차와 같으며, 이는 근의 공식 혹은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{\sqrt{3(4-k^2)}}{2}$임을 알 수 있다. 두 점 Q, R를 지나는 직선의 기울기가 1이므로, 선분 QR의 길이는 $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3(4-k^2)}}{2}$이다.

점 $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가

$$\frac{\left|\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+k\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|2+k|}{\sqrt{2}}$$

이므로 구하는 삼각형 PQR의 넓이는

$$f(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{3(4-k^2)}}{2} \cdot \frac{|2+k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3(4-k^2)}(2+k)}{4}$$

이다. (단, $-2<k<2$)

2-(3) 문항 (1)에 해당하는 실수 k에 대하여 $\{f(k)\}^2$의 최댓값을 구하시오.

[풀이]

$-2<k<2$에서 함수 $g(k)$를 $g(k)=\{f(k)\}^2=\frac{3}{16}(4-k^2)(2+k)^2$이라 하고, k에 대하여 미분하면

$$g'(k)=\frac{3}{16}\{(-2k)(2+k)^2+(4-k^2)2(2+k)\}=\frac{3}{4}(2+k)^2(1-k)$$

이다. $-2<k<1$에서 $g'(k)>0$이므로 $g(k)$가 증가하고, $1<k<2$에서 $g'(k)<0$이므로 $g(k)$가 감소한다.

따라서 $g(k)=\{f(k)\}^2$은 $k=1$에서 최댓값 $\frac{3(4-1)(2+1)^2}{16}=\frac{81}{16}$을 갖는다.

문항 3

[문항 3] 다음과 같이 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(s)$에 대하여 아래 물음에 답하시오. [30점]

좌표평면에서 실수 s에 대하여 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$과 함수 $y=\frac{4}{3}\lvert x\rvert+8$의 그래프가 한 점에서 만날 때 원의 반지름의 길이를 $f(s)$라 하자.

(1) 점 $(4,5)$에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 내린 수선의 발을 구하시오.

(2) $s \geq 4$일 때, 함수 $f(s)$를 구하시오.

(3) $-4<s<4$일 때, 함수 $f(s)$를 구하시오.

문항 3 - 출제 의도

본 문항은 좌표평면의 함수의 그래프와 원의 관계로 제시된 조건의 수리적 의미를 이해하고 원과 직선의 관계, 두 점 사이의 거리에 대한 이해를 활용하여 조건을 만족하는 함수를 결정하는 수리적 조작을 수행하는 문제이다.

3-(1). 두 직선의 수직의 의미에 대한 개념 이해와 직선의 방정식을 구하고 교점을 구하는 계산 능력을 평가한다.

3-(2). 원과 직선의 위치 관계에 대한 개념을 바탕으로 조건을 만족하는 원의 성질을 추론하고 이를 근거로 직선의 방정식을 구하여 함수를 구성하는 종합적 수리 능력을 평가한다.

3-(3). 직선과 원의 관계에 대한 개념을 바탕으로 조건의 개별적 특성을 추론하고 이를 바탕으로 좌표평면의 두 점 사이의 거리를 구하여 함수를 구성하는 종합적 수리능력을 평가한다.

문항 3 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
3-(1)	**[수학] - (2) 기하 - 2 직선의 방정식** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. **[수학] - (4) 함수 - 1 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.

3-(2)	**[수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식** [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학] - (4) 함수 - ① 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
3-(3)	**[[수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식** [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학] - (4) 함수 - ① 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2021	99-101, 112-122, 127-136, 203-208
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2021	105-107, 119-128, 133-141, 209-213

문항 3 - 문항 해설

이 문제는 함수의 그래프와 원의 방정식으로 제시된 조건을 이해하고 수리적 추론과 조작을 수행하여 함수를 구하는 문제이다. 이 과정에서 원과 직선의 위치 관계에 관한 수리적 개념에 대한 이해를 바탕으로 그래프에 관하여 제시된 조건으로부터 수리적 조건을 유도하는 수리적 추론 능력과 이 조건에 근거하여 좌표평면의 두 점 사이의 거리, 점과 직선 사이의 거리를 바르게 이해하고 효율적으로 활용하여 함수를 구하는 수리적 조작 능력을 평가하고자 한다.

문항 3 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	점 $(4,5)$에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 내린 수선의 발을 구하시오.	6점
	직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$임을 구함.	2점
	기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(4,5)$를 지나는 직선의 방정식이 $y=-\frac{3}{4}x+8$임을 구함.	2점
	이 직선과 주어진 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$의 교점을 구해 수선의 발 $(0,8)$을 구함.	2점
3-(2)	$s\ge 4$일 때, 함수 $f(s)$를 구하시오.	14점
	문항(1)에서 제시된 점 $(4,5)$가 조건을 만족하므로 $s=4$일 때 $f(4)=5$임.	2점
	$s>4$일 때 x축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 함수 $y=\frac{4}{3}\lvert x\rvert+8$의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 접해야 함을 서술함.	4점
	두 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$과 $y=0$의 각을 이등분하는 직선 중 제1사분면을 지나는 직선을 구해야 함을 올바른 근거로 서술함.	3점
	점 $(-6,0)$과 점 $(4,5)$를 지나는 직선의 방정식 $y=\frac{1}{2}x+3$을 구함.	3점
	$s\ge 4$일 때 구하는 함수 $f(s)=\frac{1}{2}s+3$을 얻음.	2점
3-(3)	$-4<s<4$일 때, 함수 $f(s)$를 구하시오.	10점
	$-4<s<4$이면 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 두 반직선과 접하지 못하므로 원이 점 $(0,8)$을 지남을 적절한 근거를 바탕으로 서술함.	3점
	원의 중심 $(s,f(s))$과 점 $(0,8)$의 거리, 원의 중심 $(s,f(s))$와 x축과의 거리가 같음을 설명함.	2점
	원의 중심과 $(s,f(s))$과 점 $(0,8)$의 거리, 원의 중심 $(s,f(s))$와 x축과의 거리를 구하여 $f(s)=\frac{1}{16}s^2+4$를 얻음.	4점
	$-4<s<4$에서 구하는 함수 $f(s)=\frac{1}{16}s^2+4$를 얻음.	1점

문항 3 - 예시 답안

3-(1) 점 $(4,5)$에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 내린 수선의 발을 구하시오.

[풀이]

직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 $(4,5)$를 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=-\frac{3}{4}(x-4)+5=-\frac{3}{4}x+8$이다.

이 직선과 주어진 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$의 교점을 구하면 $(0,8)$이다.

따라서 구하는 수선의 발은 $(0,8)$이다.

3-(2) $s \geq 4$일 때, 함수 $f(s)$를 구하시오.

[풀이]

문항 (1)의 점 $(4,5)$에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 내린 수선의 발은 $(0,8)$이고 이 점은 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프 위에 있다. 점 $(4,5)$는 점 $(0,8)$과의 거리가 $\sqrt{(0-4)^2+(8-5)^2}=5$이고 x축과의 거리가 5이므로 원 $(x-4)^2+(y-5)^2=5^2$은 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점 $(0,8)$에서 만나고 x축과 접한다. 따라서 $s=4$일 때 $f(4)=5$이다.

$s>4$일 때 x축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 접해야 한다. 좌표평면의 평행하지 않은 두 직선에 동시에 접하는 원의 중심은 두 직선의 각을 이등분하는 직선 위에 있으므로 두 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$과 $y=0$의 각을 이등분하는 직선 중 제1사분면을 지나는 직선을 구한다. 문항 (1)의 점 $(4,5)$가 두 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$, $y=0$과 같은 거리에 있으므로, 구하려는 직선은 두 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$과 $y=0$의 교점 $(-6,0)$과 점 $(4,5)$를 지나는 직선이다. 따라서 구하는 직선은 $y=\frac{0-5}{-6-4}(x-4)+5=\frac{1}{2}x+3$이고, $f(s)$를 결정하는 원의 중심이 $(s, f(s))$이므로 $s>4$일 때 $f(s)=\frac{1}{2}s+3$이다.

$s=4$일 때 $\frac{1}{2}\cdot 4+3=5$ 이므로 $s \geq 4$일 때 구하는 함수는 $f(s)=\frac{1}{2}s+3$이다.

[별해]

문항 (1)의 점 $(4,5)$에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 내린 수선의 발은 $(0,8)$이고 이 점은 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프 위에 있다. 점 $(4,5)$는 점 $(0,8)$과의 거리가 $\sqrt{(0-4)^2+(8-5)^2}=5$이고 x축과의 거리가 5이므로 원 $(x-4)^2+(y-5)^2=5^2$은 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점 $(0,8)$에서 만나고 x축과 접해야 한다. 따라서 $s=4$일 때 $f(4)=5$이다.

$s>4$일 때 x축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$에 접한다. 따라서 조건을 성립하는 원의 중심 $(s,f(s))$와 직선 $y=\frac{4}{3}x+8$의 거리

$$\frac{\left|f(s)-\frac{4}{3}s-8\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{3}{5}\left|f(s)-\frac{4}{3}s-8\right|$$

과 원의 중심 $(s,f(s))$와 x축의 거리 $|f(s)|$가 같으므로

$\frac{3}{5}\left|f(s)-\frac{4}{3}s-8\right|=|f(s)|$를 정리하면 $f(s)=\frac{1}{2}s+3$ $(s>4)$이다.

$s=4$일 때 $\frac{1}{2}\cdot 4+3=5$이므로 $s\geq 4$일 때 구하는 함수는 $f(s)=\frac{1}{2}s+3$이다.

3-(3) $-4<s<4$일 때, 함수 $f(s)$를 구하시오.

[풀이]

좌표평면에서 x축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 반직선 $y=\frac{4}{3}x+8(x>0)$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x+8(x<0)$에 접하거나 그래프의 꼭짓점 $(0,8)$을 지난다.

$-4<s<4$이면 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 두 반직선과 접하지 못하므로 원이 점 $(0,8)$을 지난다. 따라서 조건을 만족하는 원의 중심 $(s,f(s))$와 점 $(0,8)$의 거리 $\sqrt{(s-0)^2+(f(s)-8)^2}$과, 원의 중심 $(s,f(s))$와 x축과의 거리 $|f(s)|$가 같다.

$$(|f(s)|)^2=\left(\sqrt{s^2+(f(s)-8)^2}\right)^2=s^2+(f(s))^2-16f(s)+64$$

를 정리하면 $-4<s<4$에서 구하는 함수는 $f(s)=\frac{1}{16}s^2+4$이다.

[별해]

좌표평면에서 x축에 접하는 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 함수 $y=\frac{4}{3}|x|+8$의 그래프와 한 점에서 만나려면 원이 반직선 $y=\frac{4}{3}x+8(x>0)$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x+8(x<0)$에 접하거나 그래프의 꼭짓점 $(0,8)$을 지난다.

$-4<s<4$이면 원 $(x-s)^2+(y-r)^2=r^2$이 두 반직선과 접하지 못하므로 원이 점 $(0,8)$을 지난다. 따라서 조건을 만족하는 원의 중심 $(s,f(s))$와 점 $(0,8)$의 거리와 원의 중심 $(s,f(s))$와 x축과의 거리가 같다. 이 조건을 만족하는 점 $(s,f(s))$는 x축을 준선으로 하고 점 $(0,8)$을 초점으로 하는 포물선 위에 있다. 포물선의 정의에 따라 이 포물선은 준선 $y=-4$, 초점 $(0,4)$인 포물선 $x^2=4\cdot(4)y=16y$를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 $x^2=16(y-4)$, 즉 $y=\frac{1}{16}x^2+4$이다.

따라서 $-4<s<4$에서 구하는 함수는 $f(s)=\frac{1}{16}s^2+4$이다.