논술고사 출제 의도 및 답안 (자연계열)

문항 1

[문항 1] 모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n + 1, \qquad b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n + 1}$$

을 만족시킨다. 아래 물음에 답하시오. [35점]

(1) 부등식 $x^2 \le x+1$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때 α, β를 구하고, 닫힌구간 $[0, \beta]$에서 함수 $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$의 최댓값이 2임을 보이시오.

(2) β가 문항 (1)에서 정해질 때, 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \ge \beta$와 $b_n \le \beta$가 각각 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \ge a_{n+1}$과 $b_n \le b_{n+1}$이 각각 성립함을 보이시오.

문항 1 - 출제 의도

본 문항은 수열의 귀납적 정의를 이해하고 수열의 성질을 유추하기 위해 관련된 함수들의 상태를 수리적으로 추론하여 적용하는 문제이다. 이 과정에서 이차부등식의 해를 구하고 함수의 성질을 파악할 수 있는 능력을 점검한다. 또한 수학적 귀납법을 활용하여 수열의 성질을 추론하는 능력을 평가한다.

1-(1). 이차부등식의 해를 구하고 함수의 몫의 미분을 통해 구간에서의 최댓값을 구할 수 있는 수리적 추론능력을 평가한다.

1-(2). 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하기 위해 수학적 귀납법을 이용하는 추론 능력을 점검한다.

1-(3). 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 유추하기 위해 앞선 문항의 결과들을 적용할 수 있는 수리적 계산능력을 평가한다.

문항 1 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2018	52-55, 92-94
	수학	황선욱 외	미래엔	2018	236-241
	수학 Ⅰ	이준열 외	천재교육	2018	157-159, 161-163
	수학 Ⅱ	고성은 외	좋은책 신사고	2018	80-81, 87-89
	미적분	박교식 외	동아출판	2019	77-78

문항 1 -문항 해설

수학적 귀납법은 수열의 여러 가지 성질을 증명하는 데 있어서 매우 유용한 추론 방법이다. 귀납적으로 정의되어 있는 수열의 성질을 관련된 방정식의 해와 함수의 미분 등을 이용하여 점검하는 문항이다. 부등식의 해를 구하고 함수의 미분을 통해 구간에서 최댓값을 구하는 방법을 통해 수열의 성질을 추론하는 능력을 평가하는 문항이다.

문항 1 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	부등식 $x^2 \le x+1$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때 α, β를 구하고, 닫힌구간 $[0, \beta]$에서 함수 $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$의 최댓값이 2임을 보이시오.	10
	$x^2 - x - 1 = 0$의 해 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$를 구함.	2
	$x^2 \le x+1$의 해 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$를 구하거나 $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$를 구함.	2
	구간 $\left(0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$에서 $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$임을 보임으로써 $f(x)$가 구간 $\left[0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$에서 증가함수임을 보임. ※ $f(x)$가 구간 $\left[0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$에서 증가함수임을 논리적으로 보이면 3점 부여	3
	$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$에서 최댓값 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2$를 가짐을 보임.	3

하위 문항	채점 기준	배점
	※ $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}=2$의 전개 과정 없이 $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=2$를 주장하면 1점 부여	
1-(2)	β가 문항 (1)에서 정해질 때, 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \geq \beta$와 $b_n \leq \beta$가 각각 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.	15
	첫 항 $a_1=2 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$임을 보임.	2
	$n=k$일 때 $a_k \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$라 가정함.	2
	$(a_{k+1})^2=a_k+1 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$이 성립함을 보임.	3
	a_{k+1}이 양수임을 지적하고 부등식 $a_{k+1} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$가 성립함을 주장함.	1
	첫 항 $b_1=1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$임을 보임.	2
	$n=k$일 때 $b_k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$라 가정함.	2
	$b_{k+1}=2-\frac{1}{b_k+1} \leq 2-\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$가 성립함을 보임.	3
1-(3)	모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \geq a_{n+1}$과 $b_n \leq b_{n+1}$이 각각 성립함을 보이시오.	10
	문항 (1)의 결과를 인용하여 $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때 $x^2 \geq x+1$임을 이용함.	1
	문항 (2)의 결과를 인용하여 $a_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$임을 이용함.	1
	$(a_{n+1})^2=a_n+1 \leq (a_n)^2$이 성립함을 보임. ※ 문항 (1), (2)의 결과 인용 없이 식을 주장하면 0점 부여	2

하위 문항	채점 기준	배점
	a_n, a_{n+1}이 양수이므로 $a_{n+1} \le a_n$이 성립함을 보임.	1
	문항 (1)의 결과를 인용하여 $0 \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때 $x+\frac{1}{x+1} \le 2$임을 이용함.	1
	문항 (2)의 결과 $b_n \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$와 b_n이 양수임을 이용하여 $b_n + \frac{1}{b_n+1} \le 2$임을 보임.	3
	$b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n+1} \ge b_n$이 성립함을 보임.	1

문항 1 - 예시 답안

1-(1) 부등식 $x^2 \le x+1$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때 α, β를 구하고, 닫힌구간 $[0, \beta]$에서 함수 $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$의 최댓값이 2임을 보이시오.

[풀이]

함수 $g(x) = x^2 - x - 1$에 대하여, $g(x)=0$의 해는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$이다.

따라서 $g(x) \le 0$, 즉 $x^2 \le x+1$의 해는 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

그러므로 $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

구간 $[0, \beta] = \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$에서 함수 $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$은 잘 정의되고,

구간 $\left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$에서

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$에서 증가함수이므로 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$에서 최댓값을 갖는다.

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = 2$$

이므로 구간 $[0, \beta]$에서 $f(x)$의 최댓값은 2이다.

1-(2) β가 문항 1-(1)에서 정해질 때, 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \geq \beta$와 $b_n \leq \beta$가 각각 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

[풀이]

(i) 수열 $\{a_n\}$의 첫 항 $a_1 = 2 \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

$n=k$일 때 $a_k \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$라 가정하면

$$(a_{k+1})^2 = a_k + 1 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

이 성립한다. a_{k+1}이 양수이므로 $n=k+1$일 때 부등식 $a_{k+1} \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$가 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq \beta$가 성립한다.

(ii) 수열 $\{b_n\}$의 첫 항 $b_1 = 1 \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

$n=k$일 때 $b_k \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$라 가정하면

$$b_{k+1} = 2 - \frac{1}{b_k+1} \leq 2 - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = 2 - \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

가 되어 $n=k+1$일 때 부등식 $b_{k+1} \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$가 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \leq \beta$가 성립한다.

1-(3) 모든 자연수 n에 대하여 두 부등식 $a_n \geq a_{n+1}$과 $b_n \leq b_{n+1}$이 각각 성립함을 보이시오.

[풀이]

(i) 문항 (1)의 결과로부터 $x \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때 $x^2 \geq x+1$이다.

문항 (2)의 결과로부터 $a_n \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이므로

$$(a_{n+1})^2 = a_n + 1 \leq (a_n)^2$$

이 성립한다. a_n, a_{n+1}이 양수이므로 $a_{n+1} \leq a_n$이 성립한다.

(ii) 문항 (1)의 결과로부터 $0 \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때 $x + \dfrac{1}{x+1} \leq 2$이다.

양수 b_n은 문항 (2)의 결과로부터 $b_n \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이므로 $b_n + \dfrac{1}{b_n+1} \le 2$이다.

따라서

$$b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n+1} \ge b_n$$

이 성립한다.

문항 2

[문항 2] 좌표공간에 세 점 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(2,-\sqrt{2},0)$, $\mathrm{B}(2,\sqrt{2},0)$이 있다. [35점]

(1) 세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 C의 좌표를 구하시오.

(2) 세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 같은 거리에 있는 좌표공간 위의 임의의 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발 H가 문항 (1)에서 구한 점 C와 같음을 보이시오.

(3) 문항 (2)에서 주어진 한 점 D에 대하여, 평면 OAD와 평면 OAB가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos 2\theta = -\frac{1}{5}$일 때, 선분 OD의 길이를 구하시오. (단, 점 D의 z좌표는 양수이다.)

문항 2 - 출제 의도

본 문항은 좌표평면 및 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 이용하여 조건을 만족하는 점을 찾고, 정사영의 성질과 공간도형의 성질을 이용하여 문제를 해결하는 수리적 추론 및 계산 능력의 수월성을 평가한다.

2-(1). 좌표평면에서 두 점 사이의 거리에 관한 조건을 대수적인 방정식으로 표현하고 풀어서 조건을 만족하는 점을 찾을 수 있는지 평가한다.

2-(2). 좌표공간에서 두 점 사이의 거리에 관하여 피타고라스 정리 혹은 대수적 표현을 사용하여 조건을 만족하는 점을 찾을 수 있는지 평가한다.

2-(3). 공간도형의 성질 중 정사영의 길이 및 넓이가 이면각의 크기와 가지는 관계를 이해하고 대수적으로 표현하여 주어진 조건을 만족하는 도형을 결정할 수 있는지 평가한다. 또한 이 과정에서 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 있는지 점검한다.

문항 2 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2018	111-113
	수학	황선욱 외	미래엔	2018	111-113
	미적분	박교식 외	동아출판	2019	61-66
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	68-72

	기하	권오남 외	교학사	2019	132-135, 142-147
	기하	김원경 외	비상교육	2019	118-121, 128-132
	기하	홍성복 외	지학사	2019	131-135, 141-146

문항 2 - 문항 해설

이 문항에서는 두 점 사이의 거리, 정사영의 길이 및 넓이와 이면각의 관계를 이용한 공간도형에 관한 추론 및 계산 능력을 평가하고, 삼각함수의 덧셈정리에 관한 수리적 개념의 이해를 점검한다.

문항 2 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 C의 좌표를 구하시오.	10
	세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 점 C까지의 거리를 점 C의 좌표를 사용하여 대수적으로 표현함.	3
	세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 점 C까지의 거리가 같다는 조건을 사용하여 방정식을 세우고 풂.	5
	답 $\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$을 구함. ※ 두 변의 이등분선의 방정식을 구하고 교점을 구하거나, 혹은 다른 방법으로 점 C의 좌표를 구해도 무방함. 이러한 경우 풀이 과정에 8점, 정답에 2점 부여	2
2-(2)	세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 같은 거리에 있는 좌표공간 위의 임의의 점 D에서 xy 평면에 내린 수선의 발 H가 문항 (1)에서 구한 점 C와 같음을 보이시오.	8
	세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 점 D까지의 거리가 같다는 조건을 피타고라스 정리로 표현하거나 혹은 점 D의 좌표를 사용하여 대수적으로 표현함.	3
	점 H가 세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 같은 거리에 있음을 기하적 혹은 대수적으로 기술함.	3
	문항 (1)을 이용하거나 점 H의 좌표를 직접 구하여 점 H가 점 C와 같음을 결론지음.	2
2-(3)	문항 (2)에서 주어진 한 점 D에 대하여, 평면 OAD와 평면 OAB가 이루는	17

하위 문항	채점 기준	배점
	각의 크기를 θ라 하자. $\cos 2\theta = -\frac{1}{5}$일 때, 선분 OD의 길이를 구하시오. (단, 점 D의 z좌표는 양수이다.)	
	문항 (2)를 이용하여 삼각형 OAD의 정사영이 삼각형 OAC임을 기술하거나, 선분 OA의 중점을 M이라 했을 때 선분 DM의 정사영이 선분 CM임을 기술함.	2
	이면각의 크기 θ가 넓이와 가지는 관계 $\triangle\mathrm{OAC} = \triangle\mathrm{OAD} \cdot \cos\theta$를 기술하거나, 선분 DM과 선분 CM이 각각 선분 OA와 수직임을 기술한 뒤 길이의 관계 $\overline{\mathrm{CM}} = \overline{\mathrm{DM}} \cdot \cos\theta$ 혹은 $\overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{MH}} \cdot \tan\theta$임을 기술함.	3
	위의 관찰에서의 넓이와 길이의 값들을 숫자로 계산하거나 점 D의 z좌표를 사용하여 표현함.	3
	삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$임을 기술함.	2
	위의 관찰들 및 조건 $\cos 2\theta = -\frac{1}{5}$을 이용하여 길이 $\overline{\mathrm{OD}}$에 관한 방정식을 기술함.	3
	위의 방정식을 풂.	2
	답 $\overline{\mathrm{OD}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$을 구함.	2
	※ 처음부터 끝까지 공간좌표를 이용했거나, 다른 기하적 방법으로 답을 얻었어도 무방함.	

문항 2 - 예시 답안

2-(1) 세 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$로부터 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 C의 좌표를 구하시오.

[풀이]

점 C의 좌표를 $(x, y, 0)$로 두면 점 C로부터 각 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$까지의 거리의 제곱은

$$\overline{\mathrm{CO}}^2 = x^2 + y^2, \quad \overline{\mathrm{CA}}^2 = (2-x)^2 + (-\sqrt{2}-y)^2, \quad \overline{\mathrm{CB}}^2 = (2-x)^2 + (\sqrt{2}-y)^2$$

이다.

$\overline{\mathrm{CO}}^2 = \overline{\mathrm{CA}}^2$으로부터 $0 = -4x + 2\sqrt{2}y + 6$을 얻고

$\overline{\mathrm{CO}}^2 = \overline{\mathrm{CB}}^2$으로부터 $0 = -4x - 2\sqrt{2}y + 6$을 얻는다.

두 일차식을 연립하여 풀면 $0 = -8x + 12$이므로 $x = \frac{3}{2}$이고 $y = 0$이다.

따라서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$이다.

[별해]

점 C는 선분 OA와 선분 OB의 수직이등분선의 교점이다. 선분 OA와 선분 OB의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점의 좌표는 각각 $\mathrm{M}\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, $\mathrm{N}\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$이다.

두 직선 OA, OB의 기울기가 각각 $\frac{-\sqrt{2}-0}{2-0}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-0}{2-0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

선분 OA의 수직이등분선은 점 M을 지나고 기울기가 $\frac{-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$인 직선인

$y=\sqrt{2}(x-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}$이고,

선분 OB의 수직이등분선은 점 N을 지나고 기울기가 $\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$인 직선인

$y=-\sqrt{2}(x-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

이 두 직선의 교점을 구하면 $\sqrt{2}(x-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}(x-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}$로부터

$x=\frac{3}{2}, y=0$을 얻는다.

따라서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},0,0\right)$이다.

2-(2) 세 점 O, A, B로부터 같은 거리에 있는 좌표공간 위의 임의의 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발 H가 문항 (1)에서 구한 점 C와 같음을 보이시오.

[풀이]

점 H는 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발이므로

$\angle\mathrm{DHO}=\angle\mathrm{DHA}=\angle\mathrm{DHB}=90^\circ$ 이다.

피타고라스 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{HO}}^2=\overline{\mathrm{DO}}^2-\overline{\mathrm{DH}}^2,\quad \overline{\mathrm{HA}}^2=\overline{\mathrm{DA}}^2-\overline{\mathrm{DH}}^2,\quad \overline{\mathrm{HB}}^2=\overline{\mathrm{DB}}^2-\overline{\mathrm{DH}}^2$$

이고, $\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{DB}}$이므로 $\overline{\mathrm{HO}}=\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{HB}}$를 얻는다.

따라서 점 H는 세 점 O, A, B로부터 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점이므로 문항 (1)에서 구한 점 C와 같다.

[별해]

점 D의 좌표를 (x,y,z)라 하자. 점 D로부터 각 점 O, A, B까지의 거리의 제곱은

$\overline{\mathrm{DO}}^2=x^2+y^2+z^2$, $\overline{\mathrm{DA}}^2=(2-x)^2+(-\sqrt{2}-y)^2+z^2$, $\overline{\mathrm{DB}}^2=(2-x)^2+(\sqrt{2}-y)^2+z^2$

이다. $\overline{\mathrm{DO}}^2=\overline{\mathrm{DA}}^2$으로부터 $0=-4x+2\sqrt{2}y+6$을 얻고 $\overline{\mathrm{DO}}^2=\overline{\mathrm{DB}}^2$으로부터

$0=-4x-2\sqrt{2}y+6$을 얻는다. 이 두 일차식은 문항 (1)의 풀이에서의 두 일차식과 같으므로 해가 $x=\frac{3}{2}, y=0$로 문항 (1)에서와 동일하다. 점 H는 점 $D(x,y,z)$를 xy 평면에 내린 수선의 발이므로 좌표가 $(x,y,0)$이고 따라서 $\left(\frac{3}{2},0,0\right)$이다. 그러므로 점 H는 문항 (1)에서 구한 점 C와 같다.

2-(3) 문항 2-(2)에서 주어진 한 점 D에 대하여, 평면 OAD와 평면 OAB가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos 2\theta=-\frac{1}{5}$일 때, 선분 OD의 길이를 구하시오. (단, 점 D의 z좌표는 양수이다.)

[풀이]

점 D의 xy평면으로의 정사영, 즉 평면 OAB로의 정사영이 점 C이므로 삼각형 OAD를 평면 OAB로 정사영한 도형은 삼각형 OAC이다.

따라서 $\triangle OAC=\triangle OAD\cdot\cos\theta$이다.

삼각형 OAC의 넓이 $\triangle OAC$를 구하기 위해 선분 OC를 밑변으로 두면 변 OC가 x축에 포함되므로 $\overline{OC}=\frac{3}{2}$이며 높이는 점 A의 y좌표의 절댓값 $\sqrt{2}$이다.

따라서 $\triangle OAC=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$이다.

삼각형 OAD는 $\overline{OD}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이므로 점 D에서 변 OA에 내린 수선의 발은 변 OA의 중점 M이다.

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$이므로 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}=\frac{\sqrt{6}}{2}$이다.

$\overline{OD}=t$라 하면 $\angle DMO=90^\circ$이므로 $\overline{MD}^2=\overline{OD}^2-\overline{OM}^2=t^2-\frac{3}{2}$이다.

따라서 $\triangle OAD=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{MD}=\sqrt{\frac{3}{2}\left(t^2-\frac{3}{2}\right)}$ 이다.

그러므로 $\cos\theta=\frac{\triangle OAC}{\triangle OAD}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{3}{2}\left(t^2-\frac{3}{2}\right)}}$이다.

삼각함수의 덧셈정리에 의해 $\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=2\cos^2\theta-1$이 성립하므로

$$-\frac{1}{5}=\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}{\frac{3}{2}\left(t^2-\frac{3}{2}\right)}-1=\frac{3-t^2}{t^2-\frac{3}{2}}$$

이다. 따라서 $t^2=\frac{27}{8}$이고 $\overline{\mathrm{OD}}=t$는 양수이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=t=\frac{3\sqrt{6}}{4}$이다.

[별해1]

문항 (1)에 의해 삼각형 OAC는 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로 점 C에서 변 OA에 내린 수선의 발은 변 OA의 중점 $\mathrm{M}\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$이다. 삼각형 OAD는 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 이등변삼각형이므로 점 D에서 변 OA에 내린 수선의 발은 변 OA의 중점 M이다.

따라서 선분 DM과 선분 CM은 모두 선분 OA에 수직이다.

그러므로 $\angle\mathrm{DMC}=\theta$이고 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{DM}}}$이다.

$\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$에서 $\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$이고, $\angle\mathrm{DMO}=90^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{OD}}=t$라 하면 $\overline{\mathrm{DM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{t^2-\frac{3}{2}}$이다.

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{DM}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{t^2-\frac{3}{2}}}$이다.

삼각함수의 덧셈정리에 의해 $\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=2\cos^2\theta-1$이 성립하므로

$$-\frac{1}{5}=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\frac{\frac{3}{4}}{t^2-\frac{3}{2}}-1=\frac{3-t^2}{t^2-\frac{3}{2}}$$

이다. 따라서 $t^2=\frac{27}{8}$이고 $\overline{\mathrm{OD}}=t$는 양수이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=t=\frac{3\sqrt{6}}{4}$이다.

[별해2]

점 D의 좌표를 (x,y,z)라 하자. 문항 (2)에 의해 점 D의 xy평면으로의 정사영이 점 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2},0,0\right)$이므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},0,z\right)$이다.

문항 (1)에 의해 삼각형 OAC는 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로 점 C에서 변 OA에 내린 수선의 발은 변 OA의 중점 $\mathrm{M}\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$이다. 삼각형 OAD는 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{AD}}$인

이등변삼각형이므로 점 D에서 변 OA에 내린 수선의 발은 변 OA의 중점 M이다. 따라서 선분 DM과 선분 CM은 모두 선분 OA에 수직이다.

그러므로 $\angle \mathrm{DMC} = \theta$이고 $\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{DM}}}$이다.

$\overline{\mathrm{CM}} = \sqrt{\left(1-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2 + 0^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고

$\overline{\mathrm{DM}} = \sqrt{\left(1-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2 + (0-z)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}+z^2}$이다.

따라서 $\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{DM}}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\dfrac{3}{4}+z^2}}$이다.

삼각함수의 덧셈정리에 의해 $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = 2\cos^2\theta - 1$이 성립하므로

$$-\frac{1}{5} = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\frac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4}+z^2} - 1 = \frac{\dfrac{3}{4}-z^2}{\dfrac{3}{4}+z^2}$$

이다. 따라서 $z^2 = \dfrac{9}{8}$이고 z는 양수이므로 $z = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OD}} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$이다.

문항 3

[문항 3] 자연수 $n(n \geq 3)$에 대하여 닫힌구간 $[1, n]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오. [30점]

> (가) $f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n)$은 n 이하의 서로 다른 자연수이다.
> (나) $1 \leq k \leq n-1$인 자연수 k에 대하여 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 두 점 $(k, f(k))$, $(k+1, f(k+1))$을 지나는 직선의 일부이다.

(1) 함수 $f(x)$가 $f(k)=k\ (k=1,2,3,\cdots,n)$일 때 $\int_1^n f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

(2) 조건 (가), (나)를 만족하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_1^n f(x)\,dx$의 최솟값을 구하시오.

(3) 문항 (2)의 최솟값을 갖는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.

문항 3 - 출제 의도

본 문항은 일대일대응인 함수의 성질, 연속함수의 성질과 정적분의 의미를 이해하고 이로부터 최대·최소 문제를 해결하는 수리적 조작을 수행하는 문항이다.

3-(1). 연속함수에 주어진 조건에 따른 그래프를 이용하여 일차함수를 수리적으로 추론하고 정적분을 계산하는 능력을 평가한다.

3-(2). 그래프를 이용하여 연속함수의 성질을 수리적으로 추론한 후 정적분과 넓이의 관계, 수열의 합을 이용하여 정적분을 효율적으로 계산하고 최대·최소 문제를 해결하는 종합적 수리능력을 평가한다.

3-(3). 주어진 함수의 조건으로부터 순열에 관한 문제를 유추하고 효과적으로 계산하는 능력을 평가한다.

문항 3 - 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2018	112-115, 116-119 202-208, 247-250
	수학 I	황선욱 외	좋은책 신사고	2018	143-149
	수학 I	김원경 외	비상	2018	139-144
	수학 II	김원경 외	비상	2018	31-39, 112-118 125-131
	미적분	김원경 외	비상	2019	147-149
	미적분	류희찬 외	천재교육	2019	183-185

문항 3 - 문항 해설

이 문항에서는 그래프를 이용하여 연속함수의 성질을 수리적 추론하고, 정적분과 넓이의 관계에 대한 수리적 개념을 이해하며 직선의 방정식, 두 직선의 평행과 수직의 개념을 조작적으로 활용하여 넓이를 구하는 능력을 평가한다. 또한 수열의 합과 최대・최소 문제, 순열의 수 문제를 효율적인 계산 능력으로 해결하도록 하여 수리적 추론과 수리적 개념의 종합적 활용 능력과 효과적 계산 능력을 평가하고자 한다.

문항 3 - 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	함수 $f(x)$가 $f(k)=k\,(k=1,2,3,\cdots,n)$일 때 $\int_1^n f(x)\,dx$의 값을 구하시오.	8
	조건을 만족하는 함수는 두 점 $(1,1)$과 (n,n)을 직선으로 연결한 일차함수의 그래프임을 기술함.	4
	일차함수 $f(x)=x$를 기술함.	2
	$\int_1^n f(x)\,dx=\dfrac{n^2-1}{2}$을 구함.	2
3-(1) 별해	함수 $f(x)$가 $f(k)=k\,(k=1,2,3,\cdots,n)$일 때 $\int_1^n f(x)\,dx$의 값을 구하시오.	8
	연속함수 $f(x)$ 최솟값이 1이므로 구간 $[1,n]$에서 함숫값이 모두 양수임을 서술함.	2
	$\int_1^n f(x)\,dx$는 함수 $f(x)$의 그래프, $x=1$, $x=n$, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이임을 기술함.	2
	이 도형은 두 직선 $x=1$, $x=n$이 평행인 사다리꼴이며 평행인 두 선분의 길이가 각각 1, n이고 높이가 $n-1$임을 서술함.	3
	넓이는 $\dfrac{(n+1)\cdot(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-1}{2}$임을 구함.	1
3-(2)	조건 (가), (나)를 만족하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_1^n f(x)\,dx$의 최솟값을 구하시오.	15

하위 문항	채점 기준	배점
	연속함수 $f(x)$ 최솟값이 1이므로 구간 $[1, n]$에서 함숫값이 모두 양수임을 기술함.	2
	$\int_1^n f(x)\,dx$는 함수 $f(x)$의 그래프, $x=1$, $x=n$, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이임을 기술함.	2
	닫힌구간 $[k, k+1]$ 위의 도형으로 나누면 두 직선 $x=k$, $x=k+1$을 평행선으로 하는 사다리꼴이고 이 사다리꼴의 넓이는 $\frac{(f(k)+f(k+1))\cdot 1}{2}$ 임을 구함.	2
	$\int_1^n f(x)\,dx = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{f(1)+f(n)}{2}\right)$을 계산함.	5
	$f(x)$가 $f(1)=n$, $f(n)=n-1$이거나 $f(1)=n-1$, $f(n)=n$일 때 $\int_1^n f(x)\,dx$가 최솟값을 가짐을 서술함.	3
	$\int_1^n f(x)\,dx$의 최솟값 $\frac{n^2-n+1}{2}$ 을 구함.	1
3-(2) 별해	조건 (가), (나)를 만족하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_1^n f(x)\,dx$의 최솟값을 구하시오.	15
	$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx$ 로 나누어 기술함.	2
	$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \frac{f(k+1)+f(k)}{2}$ 를 계산함.	4
	$\int_1^n f(x)\,dx = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{f(1)+f(n)}{2}\right)$을 계산함.	5
	$f(x)$가 $f(1)=n$, $f(n)=n-1$이거나 $f(1)=n-1$, $f(n)=n$일 때 $\int_1^n f(x)\,dx$가 최솟값을 가짐을 서술함.	3
	$\int_1^n f(x)\,dx$의 최솟값 $\frac{n^2-n+1}{2}$ 을 구함.	1
3-(3)	문항 (2)의 최솟값을 갖는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.	7

하위 문항	채점 기준	배점
	$\int_1^n f(x)\,dx$가 최솟값을 갖는 함수 $f(x)$는 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에서 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$으로의 일대일대응이고 $f(1)=n$, $f(n)=n-1$이거나 $f(1)=n-1$, $f(n)=n$을 만족한다고 기술함.	2
	함수 $f(x)$는 집합 $\{l \mid 2 \le l \le n-1$인 자연수$\}$에서 집합 $\{m \mid 1 \le m \le n-2$인 자연수$\}$로의 일대일대응이라 기술함.	2
	집합 $\{l \mid 2 \le l \le n-1$인 자연수$\}$에서 집합 $\{m \mid 1 \le m \le n-2$인 자연수$\}$로의 일대일대응의 개수가 순열의 수 ${}_{n-2}\mathrm{P}_{n-2} = (n-2)!$과 같음을 보임.	2
	$\int_1^n f(x)\,dx$가 최솟값이 되는 함수 $f(x)$의 개수 $2(n-2)!$을 구함.	1

문항 3 - 예시 답안

3-(1) 함수 $f(x)$가 $f(k)=k\,(k=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때 $\int_1^n f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[풀이]

닫힌구간 $[1, n]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(k)=k$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$이고 조건 (나)를 만족하면 함수 $f(x)$의 그래프는 좌표평면의 두 점 $(1, 1)$과 (n, n)을 직선으로 연결한 일차함수의 그래프의 일부이다. 그래프가 두 점 $(1, 1)$과 (n, n)을 지나는 일차함수는 $f(x)=x$이므로

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^n = \frac{n^2-1}{2}$$

이다.

[별해]

닫힌구간 $[1, n]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 조건 (가), (나)를 만족하면 닫힌구간 $[1, n]$에서 최솟값이 1이므로 구간 $[1, n]$에서 함숫값이 모두 양수이다. 따라서 $\int_1^n f(x)\,dx$는 함수 $f(x)$의 그래프, $x=1$, $x=n$, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이이다. 이 도형은 두 직선 $x=1$, $x=n$이 평행인 사다리꼴이며 평행인 두 선분의 길이가 각각 1, n이고 높이가 $n-1$이므로 구하는 넓이는 $\frac{(n+1)\cdot(n-1)}{2} = \frac{n^2-1}{2}$이다.

3-(2) 조건 (가), (나)를 만족하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_1^n f(x)\,dx$의 최솟값을 구하시오.

[풀이]

닫힌구간 $[1,n]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 조건 (가), (나)를 만족하면 닫힌구간 $[1,n]$에서 최솟값이 1이므로 구간 $[1,n]$에서 함숫값이 모두 양수이다. 따라서 $\int_1^n f(x)\,dx$는 함수 $f(x)$의 그래프, $x=1$, $x=n$, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이이다. $k=1,2,3,\cdots,n-1$에 대하여 이 도형을 닫힌구간 $[k,k+1]$ 위의 도형으로 나누면 두 직선 $x=k$, $x=k+1$을 평행선으로 하는 사다리꼴이 된다. 구간 $[k,k+1]$위의 사다리꼴은 평행인 두 선분의 길이가 각각 $f(k)$, $f(k+1)$이고 높이가 1이므로 이 사다리꼴의 넓이는 $\frac{\{f(k)+f(k+1)\}\cdot 1}{2}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f(k)+f(k+1)}{2}\right)\\ &= \left(\frac{f(1)+f(2)}{2}\right)+\left(\frac{f(2)+f(3)}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{f(n-1)+f(n)}{2}\right)\\ &= \frac{f(1)}{2}+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)+\frac{f(n)}{2}\\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k)-\left(\frac{f(1)+f(n)}{2}\right)\end{aligned}$$

이다.

조건 (가)에 의해

$$\{f(k) \mid k=1,2,3,\cdots,n\}=\{1,2,3,\cdots,n\}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$이고

$$\int_1^n f(x)\,dx=\frac{n(n+1)}{2}-\left(\frac{f(1)+f(n)}{2}\right)$$

이다.

따라서 조건 (가), (나)를 만족하는 함수 $f(x)$들 중 $\frac{f(1)+f(n)}{2}$이 최댓값일 때 $\int_1^n f(x)\,dx$가 최솟값을 갖는다.

조건 (가)에 따라 함수 $f(x)$가 $f(1)=n$, $f(n)=n-1$이거나 $f(1)=n-1$, $f(n)=n$일 때 $\frac{f(1)+f(n)}{2}$이 최댓값 $\frac{n+(n-1)}{2}=\frac{2n-1}{2}$이 되고

$\int_1^n f(x)\,dx$는 최솟값 $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n-1}{2}=\frac{n^2-n+1}{2}$을 갖는다.

[별해]

정적분의 성질에 따라 닫힌구간 $[1, n]$의 정적분을 $k=1,2,3,\cdots,n-1$에서 구간 $[k,\ k+1]$ 위의 적분으로 나누어 쓰면

$$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx$$

이다. 정적분 $\int_k^{k+1} f(x)\,dx$는 구간 $[k,\ k+1]$에서 두 점 $(k, f(k))$, $(k+1, f(k+1))$을 직선으로 잇는 그래프로 나타나는 일차함수의 적분이다.

구간 $[k,\ k+1]$에서 그래프가 두 점 $(k, f(k))$, $(k+1, f(k+1))$을 지나는 일차함수 $f(x)$는

$$f(x) = \frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}(x-k)+f(k) = \{f(k+1)-f(k)\}x - kf(k+1)+(k+1)f(k)$$

이므로 정적분 $\int_k^{k+1} f(x)\,dx$를 계산하면

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} f(x)\,dx &= \int_k^{k+1}\left[\{f(k+1)-f(k)\}x - kf(k+1)+(k+1)f(k)\right]dx \\ &= \left[\{f(k+1)-f(k)\}\frac{x^2}{2}+\{-kf(k+1)+(k+1)f(k)\}x\right]_k^{k+1} \\ &= \frac{f(k+1)+f(k)}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f(k)+f(k+1)}{2}\right) \\ &= \left(\frac{f(1)+f(2)}{2}\right)+\left(\frac{f(2)+f(3)}{2}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{f(n-1)+f(n)}{2}\right) \\ &= \frac{f(1)}{2}+f(2)+f(3)+\ \cdots\ +f(n-1)+\frac{f(n)}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \left(\frac{f(1)+f(n)}{2}\right)\end{aligned}$$

이다.

조건 (가)에 의해

$$\{f(k) \mid k=1,2,3,\cdots,n\} = \{1,2,3,\cdots,n\}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고

$$\int_1^n f(x)\,dx = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{f(1)+f(n)}{2}\right)$$

이다.

따라서 조건 (가), (나)를 만족하는 함수 $f(x)$들 중 $\frac{f(1)+f(n)}{2}$이 최댓값일 때

$\int_1^n f(x)\,dx$가 최솟값을 갖는다.

조건 (가)에 따라 함수 $f(x)$가 $f(1)=n,\ f(n)=n-1$이거나 $f(1)=n-1,\ f(n)=n$일 때

$\frac{f(1)+f(n)}{2}$이 최댓값 $\frac{n+(n-1)}{2}=\frac{2n-1}{2}$이 되고

$\int_1^n f(x)\,dx$는 최솟값 $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n-1}{2}=\frac{n^2-n+1}{2}$을 갖는다.

3-(3) 문항 (2)의 최솟값을 갖는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.

[풀이]

닫힌구간 $[1,n]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 조건 (가)를 만족하면 함수 $f(x)$는 집합 $\{1,2,3,\cdots,n\}$에서 집합 $\{1,2,3,\cdots,n\}$으로의 일대일대응이다.

문항 (2)에서 구한 $\int_1^n f(x)\,dx$가 최솟값을 갖는 함수 $f(x)$는

집합 $\{1,2,3,\cdots,n\}$에서 집합 $\{1,2,3,\cdots,n\}$으로의 일대일대응이고

$f(1)=n,\ f(n)=n-1$이거나 $f(1)=n-1,\ f(n)=n$을 만족해야 한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $f(1)=n,\ f(n)=n-1$이거나 $f(1)=n-1,\ f(n)=n$이고

집합 $\{l \mid 2\le l\le n-1$인 자연수$\}$에서 집합 $\{m \mid 1\le m\le n-2$인 자연수$\}$로의 일대일대응이다.

집합 $\{l \mid 2\le l\le n-1$인 자연수$\}$에서 집합 $\{m \mid 1\le m\le n-2$인 자연수$\}$로의 일대일대응의 개수는 원소의 개수가 $n-2$인 집합에서 $(n-2)$개의 원소를 선택하여 나열하는 순열의 수와 같으므로 ${}_{n-2}\mathrm{P}_{n-2}=(n-2)!$이다.

그러므로 $\int_1^n f(x)\,dx$가 최솟값이 되는 함수 $f(x)$의 개수는 $2(n-2)!$이다.