2024년도 동국대학교 모의논술

모의논술 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2024년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	역함수 미분법, 최대최소 정리, 치환적분법
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때,

$y=f^{-1}(x)$의 도함수는 $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

-『고등학교 미적분』

【나】함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 이 구간에서 극댓값, 극솟값 $f(a)$, $f(b)$의 값 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이 된다.

-『고등학교 미적분』

【다】닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

-『고등학교 미적분』

[문제1] 함수 $f(x)=\sin^2 x+4x+3$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능하다.

실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$에서의 접선의 교점의 x좌표를 $g(t)$라고 하자.

(1) $g(\frac{\pi}{2})$**의 값을 구하시오.**

(2) 닫힌구간 $[0, \pi]$**에서** $g(t)$**의 최솟값과 최댓값을 구하시오.**

(3) $\int_{f(0)}^{f(\pi)} g(f^{-1}(x))dx - \int_{0}^{\pi} g(t)dt$**의 값을 구하시오.**

3. 출제의도

본 문항을 미적분의 접선 역함수의 미분법을 이해하고 있는지 평가하고 함수의 그래프의 개형을 파악하여 최솟값을 계산하고 치환적분법을 적용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제근거

[문제1]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	116, 131, 168
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	99, 115, 151
	미적분	김원경 외 14인	㈜비상교육	202	135

제시문 [가]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	116
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	99

제시문 [나]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	71
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	68

제시문 [다]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	168
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	151
	미적분	김원경 외 14인	㈜비상교육	202	135

5. 문항해설

본 문항의 (1)은 역함수 미분법을 이용하여 두 접선의 교점을 구하는 문제이다. (2)는 미분을 활용하여 함수의 그래프의 개형을 파악하고 증가와 감소를 활용하여 함수의 최솟값과 최댓값을 구하는 문제이다. (3)은 치환적분법을 활용하여 적분을 계산하는 문제이다.

6. 평가기준

[1단계] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2\sin t\cos t+4=\sin 2t+4$이고, 직선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이고 역함수 미분법에 의해 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{f'(t)}$이므로 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{f'(t)}(x-f(t))+t$이다. 두 접선의 교점의 x좌표가 $g(t)$이므로 $f'(t)(g(t)-t))+f(t)=\dfrac{1}{f'(t)}(g(t)-f(t))+t$를 만족한다.

[2단계] 이 식을 정리하면 $g(t)=\dfrac{tf'(t)-f(t)}{f'(t)-1}=\dfrac{t\sin 2t-\sin^2 t-3}{\sin 2t+3}$이다. 따라서 $g(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{4}{3}$이다.

[3단계] $g(t)=\dfrac{tf'(t)-f(t)}{f'(t)-1}$을 미분하면 $g'(t)=\dfrac{f''(t)(f(t)-t)}{(f'(t)-1)^2}=\dfrac{2\cos 2t(\sin^2 t+3t+3)}{(\sin 2t+3)^2}$이고

함수 $h(t)=\sin^2 t+3t+3$는 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가함수이고 $h(t)\geq h(0)=3$이다. $g'(t)=0$이면 $\cos 2t=0$을 만족하므로 $t=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$이다.

$g(0)=-1$, $g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\pi-14}{16}$, $g(\dfrac{3\pi}{4})=-\dfrac{3\pi+14}{8}$, $g(\pi)=-1$ 이므로

[4단계] 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g(\dfrac{3\pi}{4})=-\dfrac{3\pi+14}{8}$이고 최댓값은 $g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\pi-14}{16}$이다.

[5단계] $x=f(t)\ (0\leq t\leq \pi)$와 치환적분을 이용하면

$$\int_{f(0)}^{f(\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt$$

이므로 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} g(f^{-1}(x))dx-\int_0^{\pi} g(t)dt=\int_0^{\pi} g(t)(f'(t)-1)dt=\int_0^{\pi}(tf'(t)-f(t))dt$

이다.

[6단계] $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt=\left[-\frac{t}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos 2t\,dt=-\frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi}{2}$

이므로 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} g(f^{-1}(x))dx-\int_0^{\pi} g(t)dt=\int_0^{\pi}(t\sin 2t-\sin^2 t-3)dt=-4\pi$이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [6단계]까지 모든 단계의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [6단계]까지 5 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	A
중	[1단계]부터 [6단계]까지 4 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	B
	[1단계]부터 [6단계]까지 3 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	C
	[1단계]부터 [6단계]까지 2 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	D
하	[1단계]부터 [6단계]까지 1 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2\sin t\cos t+4=\sin 2t+4$이고, 직선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이고 역함수 미분법에 의해 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{f'(t)}$이므로 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{f'(t)}(x-f(t))+t$이다. 두 접선의 교점의 x좌표가 $g(t)$이므로

$f'(t)(g(t)-t))+f(t)=\dfrac{1}{f'(t)}(g(t)-f(t))+t$를 만족한다. 이 식을 정리하면

$g(t)=\dfrac{tf'(t)-f(t)}{f'(t)-1}=\dfrac{t\sin 2t-\sin^2 t-3}{\sin 2t+3}$이다. 따라서 $g(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{4}{3}$이다.

(2) $g(t)=\dfrac{tf'(t)-f(t)}{f'(t)-1}$을 미분하면 $g'(t)=\dfrac{f''(t)(f(t)-t)}{(f'(t)-1)^2}=\dfrac{2\cos 2t(\sin^2 t+3t+3)}{(\sin 2t+3)^2}$이고

함수 $h(t)=\sin^2 t+3t+3$은 $h'(t)=2\sin t\cos t+3=\sin 2t+3\geq 2$이므로 $h(t)$는 닫힌구간 $[0,\pi]$에서 증가함수이고 $h(t)\geq h(0)=3$이다. 그러므로 $g'(t)=0$이면 $\cos 2t=0$을 만족하므로 $t=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$이다.

$$g(0)=-1,\ g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi-14}{16},\ g(\frac{3\pi}{4})=-\frac{3\pi+14}{8},\ g(\pi)=-1$$

이므로 함수 $g(t)$의 최솟값은 $g(\dfrac{3\pi}{4})=-\dfrac{3\pi+14}{8}$이고 최댓값은 $g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\pi-14}{16}$이다.

(3) $x=f(t)\ (0\leq t\leq\pi)$와 치환적분을 이용하면

$$\int_{f(0)}^{f(\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\int_0^{\pi} g(t)f'(t)\,dt$$

이므로 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} g(f^{-1}(x))dx-\int_0^{\pi} g(t)dt=\int_0^{\pi} g(t)(f'(t)-1)dt=\int_0^{\pi}(tf'(t)-f(t))dt$

이다. $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt=\left[-\frac{t}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos 2t\,dt=-\frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi}{2}$

이므로 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} g(f^{-1}(x))dx-\int_0^{\pi} g(t)dt=\int_0^{\pi}(t\sin 2t-\sin^2 t-3)dt=-4\pi$이다.

2024년도 동국대학교 모의논술

모의논술 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2024년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하
	핵심개념 및 용어	전개도, 꼬인위치, 삼수선 정리, 두 직선이 이루는 각
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 (공간에서) 한 점에서 만나는 서로 다른 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면 위에서 두 직선이 이루는 각을 정할 수 있다. **-『고등학교 기하』**

【나】꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면위에 있지 않으므로 두 직선이 이루는 각은 다음과 같이 정한다.

두 직선 l과 m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 m위의 임의의 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선을 l'이라고 하면 두 직선 l', m은 한 평면을 결정한다. 이 때 두 직선 l', m이 이루는 각 중 크기가 크지 않은 쪽의 각을 두 직선 l, m이 이루는 각이라고 한다. **-『고등학교 기하』**

【다】직선 l이 평면 α와 한 점 O에서 만나고 점 O를 지나는 평면 α위의 모든 직선과 수직일 때 직선 l과 평면 α는 서로 수직이라고 하고, 이것을 기호로 $l \perp \alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선이라고 하며, 직선 l과 평면 α 가 만나는 점 O를 수선의 발이라고 한다.

직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 두 직선과 각각 수직이면 $l \perp \alpha$.

-『고등학교 기하』

【라】평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α위의 점 O, 점 O를 지나지 않고 평면 α 위에 있는 한 직선 l, 직선 l위의 점 H에 대하여

(1) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha, \overline{\mathrm{OH}} \perp l$ 이면 $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$
(2) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha, \overline{\mathrm{PH}} \perp l$ 이면 $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$
(3) $\overline{\mathrm{PH}} \perp l, \overline{\mathrm{OH}} \perp l, \overline{\mathrm{PO}} \perp \overline{\mathrm{OH}}$ 이면 $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$

-『고등학교 기하』

[문제2]

다음 전개도로 만든 정육면체에서 다음 두 직선들이 이루는 각의 크기를 구하고 위 제시문 중 어느 것을 사용하였는지 서술하시오.

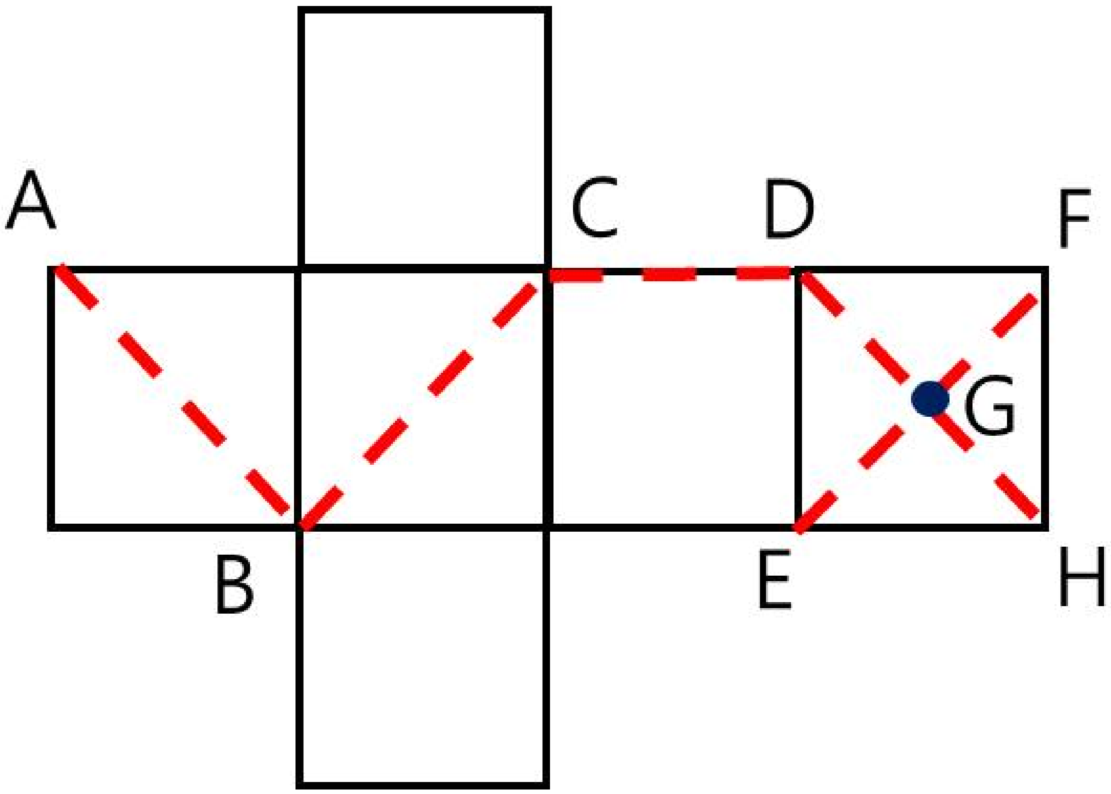
(1) $\overline{AB}$ **와** $\overline{BC}$ **(2)** $\overline{BC}$ **와** $\overline{EF}$ **(3)** $\overline{CD}$ **와** $\overline{DH}$

그리고, 선분EF**의 중점을** G**라고 할 때, 이 전개도로 만든 정육면체에서**

(4) $\overline{CG}$**와** $\overline{EF}$

가 이루는 각을 제시문 【라】의 삼수선의 정리를 이용하여 구하시오.

<00~15줄> [30점]



3. 출제의도

정육면체의 전개도로부터 정육면체를 입체적으로 구현할 수 있으며, 이로부터 한 평면 위에 있는 두 직선이 이루는 각, 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각, 한 직선과 수직인 평면위에 있는 직선이 이루는 각을 구할 수 있고, 삼수선 정리를 이용하여 두 직선이 수직임을 보일 수 있는 지를 알아보았다.

4. 출제근거

[문제 2]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	기하 (3) 공간도형과 공간좌표 ① 공간도형
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	김원경 외 14인	비상교육	2020	108
	고등학교 기하	홍성복 외 10인	지학사	2020	119,120
	고등학교 기하	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	115
	고등학교 기하	이준열 외 7인	천재교육	2020	121

제시문 **【가】**

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	기하 (3) 공간도형과 공간좌표 ① 공간도형
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	김원경 외 14인	비상교육	2020	108

제시문 **【나】**

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	기하 (3) 공간도형과 공간좌표 ① 공간도형
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	홍성복 외 10인	지학사	2020	119,120

제시문 【다】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	기하 (3) 공간도형과 공간좌표 ① 공간도형
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2019	115

제시문 【라】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	기하 (3) 공간도형과 공간좌표 ① 공간도형
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	이준열 외 7인	천재교육	2020	121

5. 문항해설

제시문 【가】 **한 평면위에 있는 두 직선이 이루는 각에 대해 설명하였다.**

제시문 【나】 **꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각을 어떻게 구하는 지 설명하였다.**

제시문 【다】 **한 직선과 한 평면이 수직이라는 것에 대해 설명하였다.**

제시문 【라】 **삼수선의 정리에 대해 설명하였다.**

[문제 2]는 전개도 위에 있는 두 점을 이은 직선들이 전개도로 정육면체를 만들었을 때의 각을 구할 수 있는 지에 대해 물어보았고, 정육면체 위의 두 직선이 수직임을 삼수선 정리로 설명할 수 있는 지에 대해 알아보는 문제이다.

6. 평가기준

(1단계) $\overline{AB}$ **와** $\overline{BC}$

점 A,B,C **가 평면을 이루므로 제시문** 【가】에 의해 각을 구할 수 있다. 이 **평면에서 삼각형** $\triangle ABC$**는 정삼각형이므로 구하는 각은** $\frac{\pi}{3}$**이다.**

(2단계) $\overline{\mathrm{BC}}$ **와** $\overline{\mathrm{EF}}$

두 직선은 꼬인위치이다. $\overline{\mathrm{BC}}$ **와 평행한 직선** $\overline{\mathrm{HD}}$**는** $\overline{\mathrm{EF}}$**와 점** G**에서 만난다. 사각형** FHED **는 정사각형이므로** $\overline{\mathrm{HD}}$**는** $\overline{\mathrm{EF}}$**는 수직이다. 따라서, 제시문 【나】**에 의해 구하는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

(3단계) $\overline{\mathrm{CD}}$ **와** $\overline{\mathrm{DH}}$

$\overline{\mathrm{CD}}$**는** $\overline{\mathrm{DE}}$**와 수직이고,** $\overline{\mathrm{DF}}$**와도 수직이다. 따라서, 제시문 【다】**에 의해 **점** $\mathrm{D,E,H,F}$**를 지나는 평면에 수직이다.** $\overline{\mathrm{DH}}$**는 이 평면위에 있는 직선이므로, 제시문 【다】**에 의해 구하는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

(4단계) $\overline{\mathrm{CG}}$**와** $\overline{\mathrm{EF}}$

$\overline{\mathrm{CD}}$는 **점** $\mathrm{D,E,H,F}$**를 지나는 평면에 수직이고,** $\overline{\mathrm{DG}}$ **와** $\overline{\mathrm{EF}}$ **도 수직이다. 제시문 【라】**의 삼수선 정리에 의해 구하는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지 모두 작성하고 세 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	A
중	[1단계]부터 [4단꼐]까지 모두 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [4단계]중 세 단계를 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [4단계]중 두 단계를 작성하고 한 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	D
하	[1단계]부터 [4단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

문제의 전개도로 만든 정육면체와 해당하는 점들은 아래와 같다.

(1) $\overline{\mathrm{AB}}$ **와** $\overline{\mathrm{BC}}$

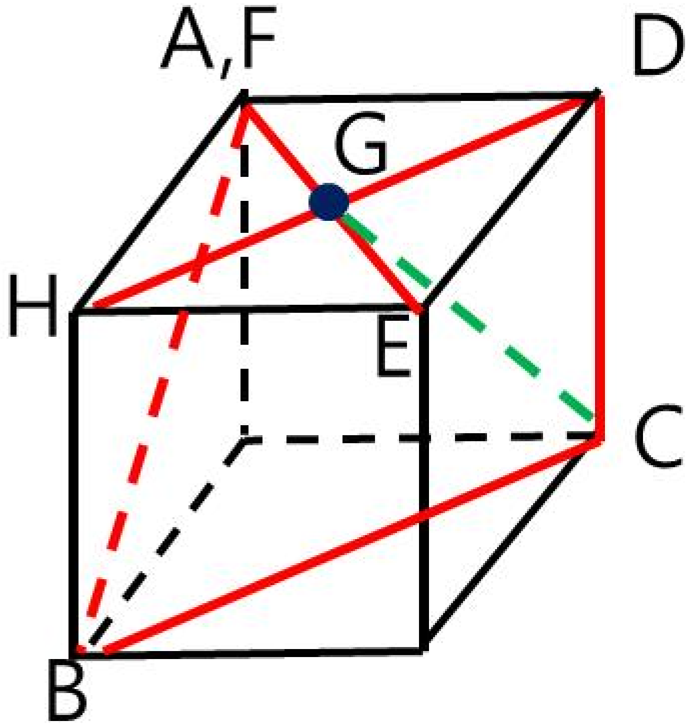
점 $\mathrm{A,B,C}$ **가 평면을 이루므로 제시문 【가】**에 의해 각을 구할 수 있다. 이 **평면에서 삼각형** $\triangle\mathrm{ABC}$ **는 정삼각형이므로 구하는 각은** $\frac{\pi}{3}$**이다.**

(2) $\overline{\mathrm{BC}}$ **와** $\overline{\mathrm{EF}}$

두 직선은 꼬인위치이다. $\overline{\mathrm{BC}}$ **와 평행한 직선** $\overline{\mathrm{HD}}$**는** $\overline{\mathrm{EF}}$**와 점** G**에서 만난다. 사각형** FHED**는 정사각형이므로** $\overline{\mathrm{HD}}$**는** $\overline{\mathrm{EF}}$**는 수직이다. 따라서, 제시문 【나】**에 의해 구하는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

(3) $\overline{\mathrm{CD}}$ **와** $\overline{\mathrm{DH}}$

$\overline{\mathrm{CD}}$**는** $\overline{\mathrm{DE}}$**와 수직이고,** $\overline{\mathrm{DF}}$**와도 수직이다. 따라서, 제시문 【다】**에 의해 **점** $\mathrm{D,E,H,F}$**를 지나는 평**



면에 수직이다. $\overline{\mathrm{DH}}$**는 이 평면위에 있는 직선이므로, 제시문** 【다】에 의해 구하는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

(4) $\overline{\mathrm{CG}}$**와** $\overline{\mathrm{EF}}$

$\overline{\mathrm{CD}}$는 **점** $\mathrm{D,E,H,F}$**를 지나는 평면에 수직이고,** $\overline{\mathrm{DG}}$ **와** $\overline{\mathrm{EF}}$ **도 수직이다. 제시문** 【라】의 삼수선 정리에 의해 구하는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

2024년도 동국대학교 모의논술

모의논술 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2024년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 증가와 감소, 음함수의 미분법, 속도와 가속도
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$, 즉 $(f'(t), g'(t))$이고, 속도의 크기 또는 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ 이다.

-『고등학교 미적분』

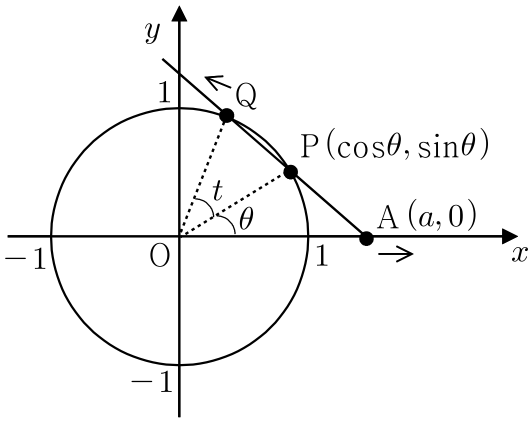
【나】함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

-『고등학교 수학 II』

【다】t의 함수 s가 방정식 $f(t, s)=0$의 꼴로 주어졌을 때, 이를 s의 t에 대한 음함수 표현이라고 한다. 음함수 표현 $f(t, s)=0$에서 s를 t의 함수로 보고, 양변의 각 항을 t에 대하여 미분하여 $\frac{ds}{dt}$를 구할 수 있다.

-『고등학교 미적분』

[문제3] 아래 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 원 위의 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$가 주어져 있다 (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$). 점 Q는 P에서 출발하여 원 위를 반시계방향으로, 시각 t일 때 $\angle \mathrm{QOP} = \mathrm{t}$를 만족하도록 움직인다. $0 < t < \pi - 2\theta$일 때, 점 Q와 P를 잇는 직선이 x축과 만나는 점을 A라 하면, Q가 위와 같이 움직임에 따라 A또한 x축 위에서 움직인다. 점 Q가 $(0, 1)$을 지날 때, 점 A의 속력을 v_{A}라 하자.



(1) v_{A}를 θ를 이용하여 나타내시오.

(2) v_{A}가 최대가 되도록 하는 θ의 값과, 그 때 v_{A}의 값을 구하시오.

(3) 점 Q가 $(0,1)$을 지날 때, 점 Q와 점 A 사이의 거리를 d_{A}라 하자. $d_{\mathrm{A}}^2 = 4v_{\mathrm{A}}$가 되도록 하는 θ를 구하시오.

3. 출제의도

평면 운동에서 물체의 위치를 시각 t에 대해 나타내고, 이를 시각 t에 대해 미분함으로써 물체의 속도를 계산할 수 있는가를 평가하는 문제이다. 특히, 그 과정에서 음함수 및 합성함수에 대한 미분법을 적용할 수 있는가를 평가한다. 마지막으로, 삼각함수의 덧셈정리를 통해 주어진 함수를 정리하고, 그 함수의 증가/감소를 파악하여 최대/최솟값을 구할 수 있는가를 평가한다.

4. 출제근거

[문제3]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (1) 함수의 극한과 연속 $\boxed{2}$ 함수의 연속 미적분 (2) 미분법 $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 미적분 (2) 미분법 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 미적분 (2) 미분법 $\boxed{3}$ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	37
	수학 II	황선욱 외 8인	미래엔	2018	41
	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	62, 81, 88, 113
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	63, 89, 99, 126

제시문 [가]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	113
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	126

제시문 [나]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (1) 함수의 극한과 연속 ② 함수의 연속
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	37
	수학 II	황선욱 외 8인	미래엔	2018	41

제시문 [다]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	88
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	99

5. 문항해설

문항(1) 풀이를 위해서는 주어진 내용으로부터 점 Q의 좌표가 점 P 및 $\mathrm{A}(a,0)$의 좌표와 이루는 관계식을 작성할 수 있어야 한다. 이 관계식에 음함수의 미분법을 적용하면 Q가 주어진 위치에 도착할 때의 속력을 구할 수 있다.
문항(2) 풀이를 위해서는, 위에서 구한 속력이 증가함수임을 파악하고, 이를 통해 최댓값을 계산하면 된다.
문항(3) 풀이를 위해서는, 점 Q가 $(0,1)$에 위치할 때의 기하적인 특징을 파악하여 AQ의 길이를 θ에 대한 식으로 표현해야 한다.

6. 평가기준

[1단계] 점 A의 좌표를 $(a,0)$이라 하자. 점 Q는 원 위를 움직이므로, 시각 t일 때, 점 Q의 좌표는 $(\cos(t+\theta), \sin(t+\theta))$이다. 점 Q, P로부터 각각 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{h_Q}$, $\mathrm{h_P}$라 하면, $\angle \mathrm{QAh_Q} = \angle \mathrm{PAh_p}$이므로, $\tan(\angle \mathrm{QAh_Q}) = \tan(\angle \mathrm{PAh_p})$이고, 다음을 얻는다.

$$\frac{\sin(t+\theta)}{a-\cos(t+\theta)} = \frac{\sin\theta}{a-\cos\theta}.$$

[2단계] 이를 정리하면 $(a-\cos\theta)\sin(t+\theta) - \sin\theta(a-\cos(t+\theta)) = 0$이고, 음함수의 미분법을 적용하여 t에 대해 미분하면,

$$\frac{da}{dt}\sin(t+\theta) + (a-\cos\theta)\cos(t+\theta) - \sin\theta\left(\frac{da}{dt} + \sin(t+\theta)\right) = 0.$$

점 Q가 점 $(0,1)$을 지날 때, $t+\theta = \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin(t+\theta)=1$, $\cos(t+\theta)=0$이다.

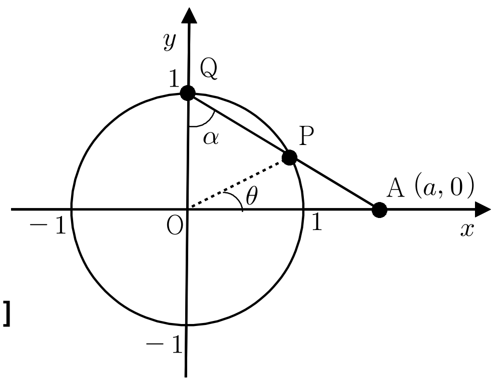
이를 위 식에 대입하고 정리하면 $|v_{\mathrm{A}}| = \left|\frac{da}{dt}\right| = \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$ ($0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$이므로). 「문항(1) 답」

[3단계] $|v_{\mathrm{A}}|(\theta) = \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$를 θ에 대해 미분하면 ($0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$에 대해)

$\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\sin\theta\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} = \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} > 0$ 이므로 $|v_{\mathrm{A}}|(\theta)$는 주어진 구간에서 증가함수이다.

따라서 최댓값은 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때이고, 이 때 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로, 최댓값은 $3+2\sqrt{3}$이다.「문항(2) 답」

***음함수의 미분을 쓰지 않고 직선의 방정식을 통해 a를 구하고, 속력을 구할 수도 있다.**



[4단계]

위 그림과 같이 점 Q**의 위치가** $(0,1)$**일 때,** $\angle \mathrm{OQA} = \alpha$**라 하면** $d_{\mathrm{A}}^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$**이다. 한편, 직선** OQ**와 직선** OP**의 길이가 같으므로** $\angle \mathrm{OPQ} = \alpha$**이고,** $2\alpha = \theta + \dfrac{\pi}{2}$**가 성립한다. 따라서,**

$d_{\mathrm{A}}^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{2}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{2}{1+\cos(\theta+\frac{\pi}{2})} = \dfrac{2}{1-\sin\theta}$**이고,** $\dfrac{d_{\mathrm{A}}^2}{|v_{\mathrm{A}}|} = \dfrac{2}{\sin\theta} = 4$**이므로,** $\theta = \dfrac{\pi}{6}$**이다. 「문항(3) 답」**

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	모든 단계를 잘 작성하였으나 논증이 부족한 부분이 하나 이상 존재하는 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지 논증이 매끄럽게 작성한 경우	B
	[1단계]부터 [2단계]까지 논증이 매끄럽게 작성한 경우	C
	[1단계]부터 [2단계]의 음함수 표현까지만 올바르게 작성한 경우	D
하	[1단계]까지만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

[(1) 풀이]

점 A**의 좌표를** $(a,0)$**이라 하자. 점** Q**는 원 위를 움직이므로, 시각** t**일 때, 점** Q**의 좌표는** $(\cos(t+\theta), \sin(t+\theta))$**이다. 점** Q**,** P **로부터 각각** x**축에 내린 수선의 발을** $\mathrm{h_Q}$**,** $\mathrm{h_P}$**라 하면,** $\angle \mathrm{QAh_Q} = \angle \mathrm{PAh_p}$ **이므로,** $\tan(\angle \mathrm{QAh_Q}) = \tan(\angle \mathrm{PAh_p})$**이고, 다음을 얻는다.**

$$\frac{\sin(t+\theta)}{a-\cos(t+\theta)} = \frac{\sin\theta}{a-\cos\theta}.$$

이를 정리하면 $(a-\cos\theta)\sin(t+\theta) - \sin\theta(a-\cos(t+\theta)) = 0$**이고, 음함수의 미분법을 적용하여** t**에 대해 미분하면,**

$$\frac{da}{dt}\sin(t+\theta) + (a-\cos\theta)\cos(t+\theta) - \sin\theta\left(\frac{da}{dt} + \sin(t+\theta)\right) = 0.$$

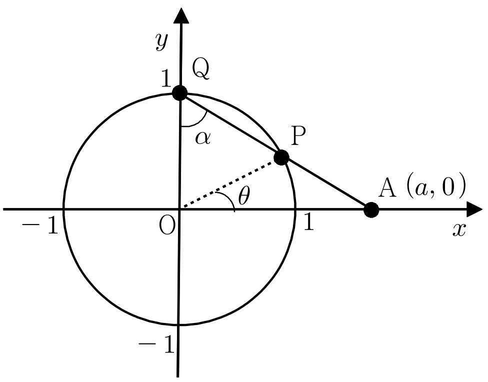
점 Q가 점 $(0,1)$을 지날 때, $t+\theta=\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin(t+\theta)=1,\ \cos(t+\theta)=0$이다.

이를 위 식에 대입하고 정리하면 $|v_{\mathrm{A}}|=\left|\frac{da}{dt}\right|=\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$ ($0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$이므로).

[(2) 풀이]

$|v_{\mathrm{A}}|(\theta)=\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$**를 θ에 대해 미분하면 ($0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$에 대해)**
$\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\sin\theta\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}=\frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}>0$ **이므로 $|v_{\mathrm{A}}|(\theta)$는 주어진 구간에서 증가함수이다. 따라서 최댓값은 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때이고, 이 때 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로, 최댓값은 $3+2\sqrt{3}$이다.**

[(3) 풀이]



위 그림과 같이 점 Q의 위치가 $(0,1)$일 때, $\angle\mathrm{OQA}=\alpha$라 하면 $d_{\mathrm{A}}^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}$이다. 한편, 직선 OQ와 직선 OP의 길이가 같으므로 $\angle\mathrm{OPQ}=\alpha$이고, $2\alpha=\theta+\frac{\pi}{2}$가 성립한다.

따라서, $d_{\mathrm{A}}^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{1+\cos2\alpha}=\frac{2}{1+\cos(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{2}{1-\sin\theta}$이고, $\frac{d_{\mathrm{A}}^2}{|v_{\mathrm{A}}|}=\frac{2}{\sin\theta}=4$이므로, $\theta=\frac{\pi}{6}$이다.