2024학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명		2024학년도 수시모집 논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열 / 문제1
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하
	핵심개념 및 용어	타원, 포물선, 쌍곡선, 초점, 꼭짓점, 준선, 점근선
예상 소요 시간		30분 / 전체 100분

2. 문항 및 제시문

【가】두 초점 $\mathrm{F}(c,0), \mathrm{F}'(-c,0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단}, a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

이다. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 타원의 초점, 꼭짓점은 각각 다음과 같다.

타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	x**축의 방향으로** m**만큼,** y**축의 방향으로** n**만큼** **평행이동**	**타원의 방정식** $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$
$(c,0),(-c,0)$	**초점의 좌표**	$(c+m,n),(-c+m,n)$
$(a,0),(-a,0),$ $(0,b),(0,-b)$	**꼭짓점의 좌표**	$(a+m,n),(-a+m,n),$ $(m,b+n),(m,-b+n)$

-『고등학교 기하』

【나】초점이 $\mathrm{F}(p,0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 다음과 같다.

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이때 포물선의 초점의 좌표는 $(p+m,n)$, 준선의 방정식은 $x=-p+m$이다.

-『고등학교 기하』

【다】두 초점 $\mathrm{F}(c,0),\mathrm{F}'(-c,0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $c>a>0, b^2=c^2-a^2$)이다. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 중심, 꼭짓점, 초점, 점근선은 각각 다음과 같다.

쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동	쌍곡선의 방정식 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
$(0,0)$	중심의 좌표	(m,n)
$(a,0),(-a,0)$	꼭짓점의 좌표	$(a+m,n),(-a+m,n)$
$(c,0),(-c,0)$	초점의 좌표	$(c+m,n),(-c+m,n)$
$y=\pm\frac{b}{a}x$	점근선의 방정식	$y-n=\pm\frac{b}{a}(x-m)$

-『고등학교 기하』

[문제1] 다음 방정식에 대하여 물음에 답하시오. (단, k는 실수이다.)

$$x^2+y^2=(kx+1)^2$$

(1) $k=0$이면 주어진 방정식은 원의 방정식이다. 이 원의 중심과 반지름을 각각 구하시오.

(2) $k=\frac{1}{2}$이면 주어진 방정식은 타원의 방정식이다. 이 타원의 초점의 좌표와 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(3) $k=1$이면 주어진 방정식은 포물선의 방정식이다. 이 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 각각 구하시오.

(4) $k=2$이면 주어진 방정식은 쌍곡선의 방정식이다. 이 쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선의 방정식을 각각 구하시오.

3. 출제의도

방정식을 원, 타원, 포물선, 쌍곡선의 방정식으로 바꿀 수 있고, 초점, 꼭짓점, 포물선의 준선의 방정식, 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.

4. 출제근거

[문제1]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 (4) 함수 $\boxed{1}$ 함수 기하 (1) 이차곡선 $\boxed{1}$ 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[10수학01-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	김경원 외 14인	비상	2021	203
	고등학교 기하	류희찬 외 9인	천재 교과서	2020	22,25
	고등학교 기하	홍성복 외 10인	지학사	2020	15
	고등학교 기하	이준열 외 7인	천재교육	2020	31

제시문 **【가】**

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	기하 (1) 이차곡선 $\boxed{1}$ 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	류희찬 외 9인	천재 교과서	2020	22,25

제시문 **【나】**

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	기하 (1) 이차곡선 $\boxed{1}$ 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	홍성복 외 10인	지학사	2020	15

제시문 **【다】**

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	기하 (1) 이차곡선 [1] 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 기하	이준열 외 7인	천재교육	2020	31

5. 문항해설

제시문 【가】는 평행이동에 따라 타원의 방정식과 타원의 초점과 꼭짓점이 어떻게 바뀌는지 설명하였다.
제시문 【나】는 평행이동에 따라 포물선의 방정식과 포물선의 초점과 준선의 방정식이 어떻게 바뀌는지 설명하였다.
제시문 【다】는 평행이동에 따라 쌍곡선의 방정식과 쌍곡선의 중심, 초점, 꼭짓점, 점근선의 방정식이 어떻게 바뀌는지 설명하였다.
[문제1]은 주어진 방정식을 원, 타원, 포물선, 쌍곡선의 방정식으로 변환하고, 변환한 이차 곡선의 초점, 꼭짓점, 준선, 점근선 등을 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 평가기준

(1단계) $k=0$이면 주어진 방정식은 $x^2+y^2=1$ 이므로 중심이 $(0,0)$이고, 반지름이 1인 원이다.

(2단계) $k=\frac{1}{2}$이면 주어진 방정식은 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ 이므로

$$\frac{3}{4}x^2-x+y^2=1,\ \ \frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{3},\ \ \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$$

이다. 따라서, $k=\frac{1}{2}$이면 주어진 방정식은 타원 $\frac{x^2}{\frac{16}{9}}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$ 을 x축의 양의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼 평행이동한 타원의 방정식이 된다. 제시문 **【가】**에서 $a=\frac{4}{3}, b=\frac{2\sqrt{3}}{3}, c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{2}{3}$ 이므로 초점의 좌표는 $\left(\frac{4}{3},0\right),(0,0)$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(2,0),\left(-\frac{2}{3},0\right),\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$이 된다.

(3단계) $k=1$이면 주어진 방정식은 $x^2+y^2=(x+1)^2$ 이므로

$$y^2=2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

이다. 따라서, $k=1$이면 주어진 방정식은 포물선 $y^2=2x$을 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 포물선이 된다. 제시문 【나】에서 $p=\frac{1}{2}$가 되므로 초점의 좌표는 $(0,0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

(4단계) $k=2$ 이면 주어진 방정식은 $x^2+y^2=(2x+1)^2$ 이므로

$$3x^2+4x-y^2=-1,\ 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-y^2=\frac{1}{3},\ \frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$$

이다. 따라서, $k=2$이면 주어진 방정식은 쌍곡선 $\frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$ 을 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}$만큼 평행이동한 쌍곡선이 된다. 제시문 【다】에서 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{\sqrt{3}}{3}, c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2}{3}$이므로, 초점의 좌표는 $(0,0), \left(-\frac{4}{3},0\right)$이고 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)$이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지 모두 작성하고 세 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	A
중	[1단계]부터 [4단꼐]까지 모두 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [4단계]중 세 단계를 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [4단계]중 두 단계를 작성하고 한 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	D
하	[1단계]부터 [4단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

(1) $k=0$이면 주어진 방정식은 $x^2+y^2=1$ 이므로 중심이 $(0,0)$이고, 반지름이 1인 원이다.

(2) $k=\frac{1}{2}$이면 주어진 방정식은 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ 이므로

$$\frac{3}{4}x^2 - x + y^2 = 1,\ \ \frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{3},\ \ \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

이다. 따라서, $k=\frac{1}{2}$이면 주어진 방정식은 타원 $\frac{x^2}{\frac{16}{9}}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$ 을 x축의 양의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼 평행이동한 타원의 방정식이 된다. 제시문 **【가】**에서 $a=\frac{4}{3}, b=\frac{2\sqrt{3}}{3}, c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{2}{3}$ 이므로 초점의 좌표는 $\left(\frac{4}{3},0\right),(0,0)$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(2,0),\left(-\frac{2}{3},0\right),\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$이 된다.

(3) $k=1$이면 주어진 방정식은 $x^2+y^2=(x+1)^2$ 이므로

$$y^2 = 2x+1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

이다. 따라서, $k=1$이면 주어진 방정식은 포물선 $y^2=2x$을 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 포물선이 된다. 제시문 **【나】**에서 $p=\frac{1}{2}$가 되므로 초점의 좌표는 $(0,0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

(4) $k=2$ 이면 주어진 방정식은 $x^2+y^2=(2x+1)^2$ 이므로

$$3x^2+4x-y^2=-1,\ \ 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3},\ \ \frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

이다. 따라서, $k=2$이면 주어진 방정식은 쌍곡선 $\frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$ 을 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}$만큼 평행이동한 쌍곡선이 된다. 제시문 **【다】**에서 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{\sqrt{3}}{3}, c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2}{3}$이므로, 초점의 좌표는 $(0,0),\left(-\frac{4}{3},0\right)$이고 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)$이다.

2024학년도 동국대학교 수시모집

논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2024학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	탄젠트함수의 덧셈정리, 역함수 미분법, 치환적분법
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】코사인함수와 탄젠트함수의 덧셈정리는 각각 다음과 같다.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

-『고등학교 미적분』

【나】미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때,

$y=f^{-1}(x)$의 도함수는 $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

-『고등학교 미적분』

【다】닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

-『고등학교 미적분』

[문제2] 함수 $f(x)=\sin x+4x+1$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능하다.

실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선을 l_1, 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$에서의 접선을 l_2라 하고, l_1과 l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $g(t)=\tan\theta$라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오.

(2) 함수 $g(t)$의 최솟값을 구하시오.

(3) $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx$의 값을 구하시오.

3. 출제의도

[문제2]는 고등학교 미적분의 역함수 미분법, 탄젠트의 덧셈정리를 계산할 수 있는지를 평가하고 미분을 이용하여 최솟값을 구하고 치환적분법을 이용할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제근거

[문제2]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ① 여러 가지 함수의 미분 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용 미적분 (3) 적분법 ① 여러 가지 적분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	69, 71, 116, 131, 168
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	66, 68, 99, 115, 151
	미적분	김원경 외 14인	㈜비상교육	202	135

제시문 [가]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ① 여러 가지 함수의 미분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	69, 71
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	66, 68

제시문 [나]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	116
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	99

제시문 [다]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (3) 적분법 [1] 여러 가지 적분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2020	168
	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	151
	미적분	김원경 외 14인	㈜비상교육	202	135

5. 문항해설

[문제2]의 (1)은 기울기와 탄젠트 사이의 관계를 이해하고, 역함수 미분법과 탄젠트함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기를 나타내는 문제이다. [문제2]의 (2)는 미분를 이용하여 함수의 증가와 감소를 파악하여 함수의 최솟값을 구하는 문제이며 (3)은 치환적분법을 활용하여 정적분의 값을 구하는 문제이다.

6. 평가기준

[1단계] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\cos t+4$이고, 이 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α라고 하면 $\tan\alpha=f'(t)=\cos t+4$이다. 또한 역함수 미분법에 의해 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{f'(t)}$이고, 이 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 β라고 하면 $\tan\beta=\dfrac{1}{f'(t)}$이다.

[2단계] 그러므로 $g(t)=\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{(f'(t))^2-1}{2f'(t)}$이다.

$f'(\frac{\pi}{2})=4$이므로 $g(\frac{\pi}{2})=\dfrac{15}{8}$이다.

[3단계] $g(t)=\dfrac{(\cos t+4)^2-1}{2(\cos t+4)}$에서 $\cos t+4=s$ $(3\le s\le 5)$로 치환하면 $g(t)$의 최솟값은 $h(s)=\dfrac{s^2-1}{2s}$ $(3\le s\le 5)$의 최솟값과 같다. $h'(s)=\dfrac{1+s^2}{2s^2}>0$이므로 $h(s)$는 구간 $[3,5]$에서 증가함수이다.

[4단계] $s=3$일 때, 함수 $g(t)$의 최솟값은 $h(3)=\frac{4}{3}$이다.

[5단계] $x=f(t)\,(0\le t\le 2\pi)$와 제시문 【다】를 이용하면

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\int_0^{2\pi} g(t)f'(t)\,dt$$

[6단계] 그런데 $g(t)=\frac{(f'(t))^2-1}{2f'(t)}$이고 $f'(t)=\cos t+4$이므로

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}((\cos t+4)^2-1)dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+8\cos t+15)dt$$ 이고

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t+1}{2}\,dt=\left[\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi,\quad \int_0^{2\pi}\cos t\,dt=[\sin t]_0^{2\pi}=0$$ 이다.

따라서 $\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+8\cos t+15)dt=\frac{31\pi}{2}$이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [6단계]까지 모든 단계의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [6단계]까지 5 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	A
중	[1단계]부터 [6단계]까지 4 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	B
	[1단계]부터 [6단계]까지 3 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	C
	[1단계]부터 [6단계]까지 2 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	D
하	[1단계]부터 [6단계]까지 1 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\cos t+4$이고, 이 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α라고 하면 $\tan\alpha=f'(t)=\cos t+4$이다. 또한 역함수 미분법에 의해 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t),t)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{f'(t)}$이고, 이 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 β라고 하면 $\tan\beta=\frac{1}{f'(t)}$이다.

그러므로 $g(t)=\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(f'(t))^2-1}{2f'(t)}$이다. $f'(\frac{\pi}{2})=4$이므로 $g(\frac{\pi}{2})=\frac{15}{8}$ 이다.

(2) $g(t)=\frac{(\cos t+4)^2-1}{2(\cos t+4)}$에서 $\cos t+4=s$ $(3\le s\le 5)$로 치환하면 $g(t)$의 최솟값은 $h(s)=\frac{s^2-1}{2s}$ $(3\le s\le 5)$의 최솟값과 같다. $h'(s)=\frac{1+s^2}{2s^2}>0$이므로 $h(s)$는 구간 $[3,5]$에서 증가함수이고 $s=3$일 때, 함수 $g(t)$의 최솟값은 $h(3)=\frac{4}{3}$이다.

(3) $x=f(t)\,(0\le t\le 2\pi)$와 제시문 **【다】**를 이용하면

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\int_0^{2\pi} g(t)f'(t)\,dt$$

이다. 그런데 $g(t)=\dfrac{(f'(t))^2-1}{2f'(t)}$이고 $f'(t)=\cos t+4$이므로

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}((\cos t+4)^2-1)dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+8\cos t+15)dt$$ 이고

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t+1}{2}\,dt=\left[\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi,\ \int_0^{2\pi}\cos t\,dt=[\sin t]_0^{2\pi}=0$$이다.

따라서 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+8\cos t+15)dt=\frac{31\pi}{2}$이다.

2024학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2024학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 증가와 감소, 음함수의 미분법, 속도와 가속도
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$, 즉 $(f'(t), g'(t))$이고, 속도의 크기 또는 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$이다.

-『고등학교 미적분』

【나】함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

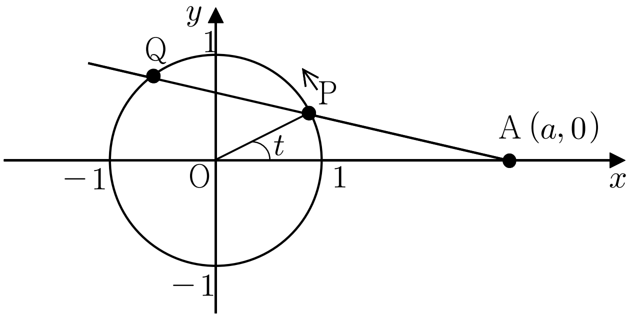
-『고등학교 수학 II』

【다】t의 함수 s가 방정식 $f(t, s)=0$의 꼴로 주어졌을 때, 이를 s의 t에 대한 음함수 표현이라고 한다. 음함수 표현 $f(t, s)=0$에서 s를 t의 함수로 보고, 양변의 각 항을 t에 대하여 미분하여 $\frac{ds}{dt}$를 구할 수 있다.

-『고등학교 미적분』

[문제3] 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 x축 위의 점 $\mathrm{A}(a, 0)$가 있다. (단, $2 \le a \le 3$) 점 P는 점 $(1, 0)$에서 출발하여, 시각 t가 $0 \le t < \frac{\pi}{3}$일 때

$\angle \mathrm{POA}=t$**를 만족하도록 원 위를 반시계방향으로 움직인다. 점 A와 P를 잇는 직선이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.**



시각 $t=t_0$일 때, 점 Q의 위치는 $(0,1)$이다. 다음 물음에 답하시오.

(1) $t=t_0$일 때, 점 Q의 속력을 a를 이용하여 나타내시오.

(2) $t=t_0$일 때, 점 Q의 속력이 최대가 되도록 하는 a의 값과 그 때의 점 Q의 속력을 구하시오.

3. 출제의도

[문제3]은 좌표평면에서 특정한 점의 위치를 시각 t에 대해 나타내고, 이를 시각 t에 대해 미분함으로써 이 점에서의 속도를 계산할 수 있는가를 평가한다. 특히, 속도 계산 과정에서 음함수와 합성함수에 대한 미분법을 이용할 수 있는가에 주안을 두어 평가한다. 또한, 삼각함수의 덧셈정리를 통해 주어진 함수를 나타내고, 함수의 증가와 감소를 파악하여 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가를 평가한다.

4. 출제근거

[문제3]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (1) 함수의 극한과 연속 $\boxed{2}$ 함수의 연속 미적분 (2) 미분법 $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 미적분 (2) 미분법 $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 미적분 (2) 미분법 $\boxed{3}$ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	37
	수학 II	황선욱 외 8인	미래엔	2018	41
	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	62, 81, 88, 113
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	63, 89, 99, 126

제시문 [가]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	113
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	126

제시문 [나]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (1) 함수의 극한과 연속 ② 함수의 연속
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	37
	수학 II	황선욱 외 8인	미래엔	2018	41

제시문 [다]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	88
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	99

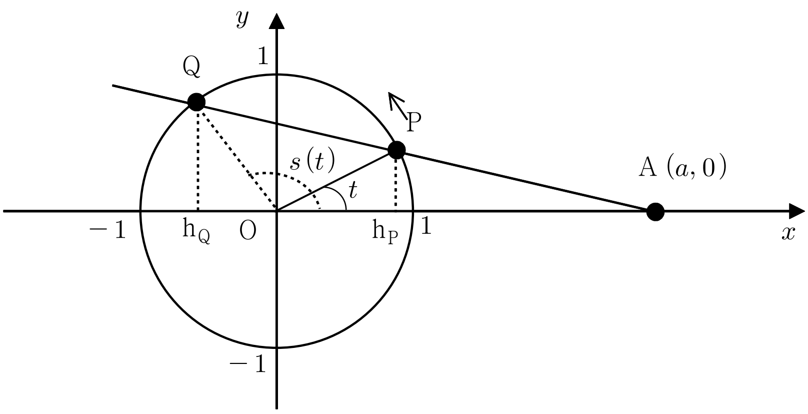
5. 문항해설

문항(1)은 점 Q, P, $A(a,0)$사이의 관계를 식으로 나타내고, 음함수의 미분법을 이용하여 이 관계식으로부터 시각 t에서 점 Q의 속도를 구하며, 이를 통하여 Q가 주어진 위치에 도착할 때의 속력을 계산한다.

문항(2)는 점 Q가 $(0,1)$일 때, 삼각함수의 덧셈공식을 이용하여 t_0를 a에 대한 식으로 나타내고, a에 관한 함수로 표현된 속력의 증가와 감소를 파악하여 주어진 구간에서 속력의 최댓값을 구한다.

6. 평가기준

[1단계]



위 그림과 같이 시각 t에 원점 O와 점 Q를 잇는 직선 OQ와 x축의 양의 방향이 이루는 각을 $s(t)$라 하자. Q는 원 위를 움직이므로, Q의 좌표는 $(\cos s(t), \sin s(t))$이고, 속력은 $\sqrt{(\sin^2 s(t)+\cos^2 s(t))(\frac{ds}{dt})^2}$ $=\left|\frac{ds}{dt}\right|$이다. 점 Q, P로부터 각각 x축에 내린 수선의 발을 h_Q, h_P라 하면, $\angle QAh_Q=\angle PAh_p$이므로, $\tan(\angle QAh_Q)=\tan(\angle PAh_p)$이고, 다음을 얻는다.

$$\frac{\sin s(t)}{a-\cos s(t)}=\frac{\sin t}{a-\cos t}.$$

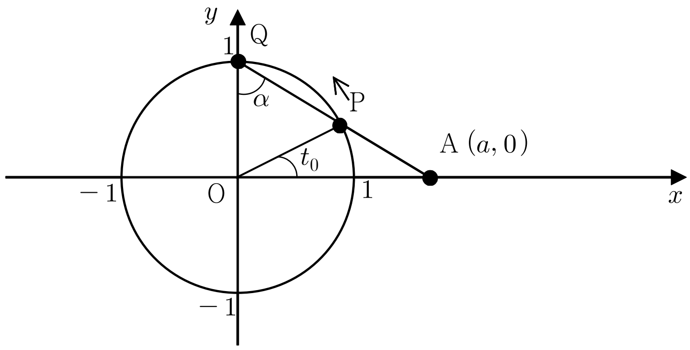
[2단계] 이를 정리하면 $(a-\cos t)\sin s(t)-\sin t(a-\cos s(t))=0$이고, 음함수의 미분법에 의해

$$\sin t\sin s(t)+(a-\cos t)\cos s(t)\frac{ds}{dt}-\cos t(a-\cos s(t))-\sin t\sin s(t)\frac{ds}{dt}=0.$$

점 Q가 점 $(0,1)$을 지날 때, $s(t)=\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin s(t)=1, \cos s(t)=0$ 이고, $t=t_0$ 이므로,

이를 위 식에 대입하고 정리하면 $t=t_0$에서 Q의 속력은 $\left|\frac{ds}{dt}\right|=\left|1-a\frac{\cos t_0}{\sin t_0}\right|$이다.

[3단계]



위 그림과 같이 점 Q**의 위치가** $(0,1)$**인 상황에서** $\angle\mathrm{AQO}=\alpha$**라 하면,** $\tan\alpha=a$**이다.**

한편, 직선 OQ**와 직선** OP**의 길이가 같으므로** $\angle\mathrm{QPO}=\alpha$**이고,** $t_0+\frac{\pi}{2}=2\alpha$**가 성립한다.**

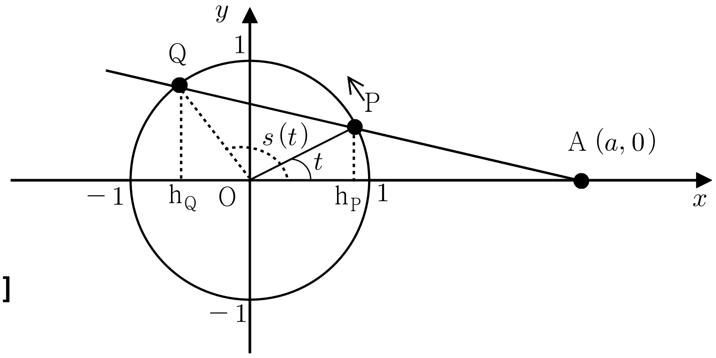
따라서, $\dfrac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{\sin(2\alpha)}{-\cos(2\alpha)}=-\tan 2\alpha=-\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2a}{a^2-1}$**이고,**

Q**의 속력은** $\left|1-\dfrac{2a^2}{a^2-1}\right|=\left|-1-\dfrac{2}{a^2-1}\right|=1+\dfrac{2}{a^2-1}$ **(**$a\geq 2$**이므로)이다.**

[4단계] $1+\dfrac{2}{a^2-1}$**는** $2\leq a\leq 3$**에서 감소함수이므로, 점** Q**의 속력은** $a=2$**일 때 최대이고, 그 값은** $1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$**이다.**

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	모든 단계를 잘 작성하였으나 [3단계] 답에서 절대값 생략하거나 [4단계]에서 논증이 부족할 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지 논증이 매끄럽게 작성한 경우	B
	[1단계]부터 [2단계]까지 논증이 매끄럽게 작성한 경우	C
	[1단계]부터 [2단계]의 음함수 표현까지 올바르게 작성한 경우	D
하	[1단계]까지만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안



[문항(1) 풀이]

위 그림과 같이 시각 t**에 원점** O**와 점** Q**를 잇는 직선** OQ**와** x**축의 양의 방향이 이루는 각을** $s(t)$**라 하자.** Q**는 원 위를 움직이므로,** Q**의 좌표는** $(\cos s(t), \sin s(t))$**이고, 속력은** $\sqrt{(\sin^2 s(t)+\cos^2 s(t))(\frac{ds}{dt})^2}$ $=\left|\frac{ds}{dt}\right|$**이다. 점** Q**,** P**로부터 각각** x**축에 내린 수선의 발을** $\mathrm{h_Q}$**,** $\mathrm{h_P}$**라 하면,** $\angle \mathrm{QAh_Q} = \angle \mathrm{PAh_p}$**이므로,** $\tan(\angle \mathrm{QAh_Q}) = \tan(\angle \mathrm{PAh_p})$**이고, 다음을 얻는다.**

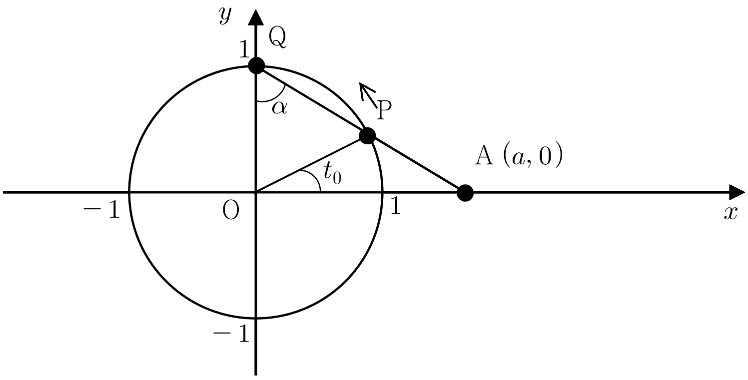
$$\frac{\sin s(t)}{a-\cos s(t)} = \frac{\sin t}{a-\cos t}.$$

이를 정리하면 $(a-\cos t)\sin s(t) - \sin t(a-\cos s(t)) = 0$**이고, 음함수의 미분법에 의해**

$$\sin t \sin s(t) + (a-\cos t)\cos s(t)\frac{ds}{dt} - \cos t\,(a-\cos s(t)) - \sin t \sin s(t)\frac{ds}{dt} = 0.$$

점 Q**가 점** $(0,1)$**을 지날 때,** $s(t) = \frac{\pi}{2}$**이므로** $\sin s(t) = 1,\ \cos s(t) = 0$ **이고,** $t = t_0$ **이므로,**

이를 위 식에 대입하고 정리하면 $t = t_0$**에서** Q**의 속력은** $\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|1 - a\frac{\cos t_0}{\sin t_0}\right|$**이다.**



위 그림과 같이 점 Q**의 위치가** $(0,1)$**인 상황에서** $\angle \mathrm{AQO} = \alpha$**라 하면,** $\tan\alpha = a$**이다.**

한편, 직선 OQ**와 직선** OP**의 길이가 같으므로** $\angle \mathrm{QPO} = \alpha$**이고,** $t_0 + \frac{\pi}{2} = 2\alpha$**가 성립한다.**

따라서, $\dfrac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(2\alpha-\frac{\pi}{2})}=\dfrac{\sin(2\alpha)}{-\cos(2\alpha)}=-\tan 2\alpha=-\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2a}{a^2-1}$ **이고,**

Q**의 속력은** $\left|1-\dfrac{2a^2}{a^2-1}\right|=\left|-1-\dfrac{2}{a^2-1}\right|=1+\dfrac{2}{a^2-1}$ **(**$a\ge 2$**이므로)이다.**

[문항(2) 풀이]

$1+\dfrac{2}{a^2-1}$**는** $2\le a\le 3$**에서 감소함수이므로, 점** Q**의 속력은** $a=2$**일 때 최대이고, 그 값은** $1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$**이다.**