2022학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2022학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분계수, 정적분, 이계도함수
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

【가】 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

-『고등학교 수학 II』

【나】 임의의 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\int f(x)dx=F(x)+C$ (C는 적분상수)일 때

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

-『고등학교 수학 II』

【다】 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때 함수 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

를 함수 $y=f(x)$의 이계도함수라 하고, 이것을 기호로

$$f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

-『고등학교 미적분』

[문제1] 실수 전체에서 도함수와 이계도함수가 존재하는 함수 f가 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(y)f'(x),\quad f(0)=0,\quad f(1)=a\ (a>0)$$

를 만족한다고 하자. 이 때, $f'(0), f''(0), \int_0^2 f(x)dx$를 각각 구하시오.

3. 출제의도

함수와 도함수에 대한 관계식으로부터 함수의 미분값과 적분값을 구할 수 있다.

4. 출제근거

[문제1]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (2) 미분 ① 미분계수 수학 II (3) 적분 ② 정적분 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	고성은	좋은책신사고	2020	70
	수학 II	박교식	동아출판	2020	63
	수학 II	배종숙	금성출판사	2020	124
	미적분	류희찬	천재교과서	2020	120

제시문【가】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (2) 미분 ① 미분계수
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	박교식	동아출판	2020	63

제시문【나】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (3) 적분 ② 정적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	배종숙	금성출판사	2020	124

제시문【다】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	류희찬	천재교과서	2020	120

5. 문항해설

[문항 1] 함수와 그 도함수의 관계식을 이용하여, 미분계수, 정적분 값을 구하는 문제이다.

제시문 [가] 도함수의 정의에 대해 설명하였다.

제시문 [나] 정적분의 정의에 대해 설명하였다.

제시문 [다] 이계도함수에 대해 설명하였다.

6. 채점기준

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [3단계]까지를 모두 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	S
	[1단계]부터 [3단계]까지를 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	A
중	[1단계]부터 [2단계]까지를 모두 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	B
	[1단계]부터 [2단계]까지를 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	C
	[1단계]를 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	D
하	[1단계]를 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	E
	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

하위 문항	채점 기준
	모든 실수 x, y 에 대해 만족하는 다음 식 $$f(x+y)-f(x-y) = 2f(y)f'(x)$$ 을 식(1) 이라고 하자. **[1단계] $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.** 식 (1)을 0이 아닌 실수 y로 나누고 $f(0)=0$임을 이용하면 $$\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y} = \frac{f(y)-f(0)}{y}f'(x)$$ 이다. y가 0으로 가까이 가면 $$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}f'(x)$$ 미분계수의 정의에 의해 $$f'(x)=f'(0)f'(x)$$ 이므로 $f'(0)=1$ 또는 $f'(x)$는 상수함수 0이다. $f(0)=0$ 이고 $f(1)=a>0$ 이므로 $f'(x)$는 상수함수 0이 될 수 없다. 따라서, $f'(0)=1$ 이다. **[2단계] $f''(0)$의 값을 구할 수 있다.** 식 (1)에 $x=0$을 대입하면 $f(y)=-f(-y)$를 유도할 수 있고, 양변을 y에 관하여 미분하면 $f'(y)=f'(-y)$를 얻는다. 식(1)에 $y=1$을 대입하면 $$f(x+1)-f(x-1) = 2f(1)f'(x)$$ $f(1)=a$을 대입하고 위 식을 x에 대하여 미분하면 $$f'(x+1)-f'(x-1) = 2af''(x)$$ 이다. $x=0$을 대입하고 $f'(y)=f'(-y)$ 임을 이용하면, $$2af''(0)=f'(1)-f'(-1)=0$$ 이므로 $f''(0)=0$ 이다. **[2단계 다른 풀이] 와 같이 풀 수도 있다.** **[3단계] $\int_0^2 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.** 식 (1)에서 $y=x$를 대입하면 모든 실수 x에 대해 $f(2x)=2f(x)f'(x)$ 이고 $$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 2f(2t)dt = \int_0^1 4f(t)f'(t)dt$$ $$= [2\{\mathrm{f(t)}\}^2]_0^1 = 2(\{\mathrm{f(1)}\}^2 - \{\mathrm{f(0)}\}^2) = 2\mathrm{a}^2$$ 을 유도할 수 있다.

7. 예시답안

모든 실수 x,y 에 대해 만족하는 다음 식

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(y)f'(x)$$

을 식(1) 이라고 하자.

[1단계]

식 (1)을 0이 아닌 실수 y로 나누고 $f(0)=0$임을 이용하면

$$\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}=\frac{f(y)-f(0)}{y}f'(x)$$

이다. y가 0으로 가까이 가면

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}f'(x)$$

미분계수의 정의에 의해

$$f'(x)=f'(0)f'(x)$$

이므로 $f'(0)=1$ 또는 $f'(x)$는 상수함수 0이다. $f(0)=0$ 이고 $f(1)=a>0$ 이므로 $f'(x)$는 상수함수 0이 될 수 없다. 따라서 $f'(0)=1$ 이다.

[2단계]

식 (1)에 $x=0$을 대입하면 $f(y)=-f(-y)$를 유도할 수 있고, 양변을 y에 관하여 미분하면 $f'(y)=f'(-y)$를 얻는다. 식(1)에 $y=1$을 대입하면

$$f(x+1)-f(x-1)=2f(1)f'(x)$$

$f(1)=a$을 대입하고 위 식을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x+1)-f'(x-1)=2af''(x)$$

이다. $x=0$을 대입하고 $f'(y)=f'(-y)$ 임을 이용하면,

$$2af''(0)=f'(1)-f'(-1)=0$$

이므로 $f''(0)=0$ 이다.

[3단계]

식 (1)에서 $y=x$를 대입하면 모든 실수 x에 대해 $f(2x)=2f(x)f'(x)$ 이고

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 2f(2t)dt=\int_0^1 4f(t)f'(t)dt=[2\{\mathrm{f}(\mathrm{t})\}^2]_0^1=2(\{\mathrm{f}(1)\}^2-\{\mathrm{f}(0)\}^2)=2\mathrm{a}^2$$

을 유도할 수 있다.

[2단계 다른 풀이] 식(1)에 x 대신 $x+h\ (h\neq 0)$를 대입하면

$$f(x+h+y)-f(x+h-y)=2f(y)f'(x+h)$$

이고 이 식에서 식(1)을 빼면

$$f(x+h+y)-f(x+y)-(f(x+h-y)-f(x-y))=2f(y)(f'(x+h)-f'(x))$$

이다. 양변을 h 로 나누고 h가 0으로 갈 때의 극한을 구하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+y+h)-f(x+y)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-y+h)-f(x-y)}{h}=2f(y)\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

이므로 도함수와 이계도함수의 정의에 의해

$$f'(x+y)-f'(x-y)=2f(y)f''(x)$$

이다. $x=0, y=1$을 대입하고 $f'(y)=f'(-y)$ 임을 이용하면

$$2af''(0)=f'(1)-f'(-1)=0$$

이므로 $f''(0)=0$ 이다.

2022학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2022학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	위치, 속도, 기울기, 직선의 방정식
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

【가】 함수 $y=f(x)$의 $x=t$에서의 미분계수 $f'(t)$는 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기와 같다.

-『고등학교 수학II』

【나】 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때 시각 t에서 점 P의 속도 v는

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

-『고등학교 수학II』/『고등학교 미적분』

【다】 수직선 위를 움직이는 점 P의 운동 방향은 점 P의 속도 v가 $v>0$일 때에는 양의 방향이고, $v<0$일 때에는 음의 방향이다.

-『고등학교 수학II』

【라】 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

-『고등학교 수학』

[문제2] 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다.

- **시각 $t=0$에서 P의 위치는 1이고 Q의 위치는 -1이다.**

- **시각 $t=0$부터 두 점 P, Q가 처음으로 만날 때까지 P는 일정한 속도 $-\frac{1}{9}$로, Q는 일정한 속도 $a\,(a>0)$로 움직인다.**

시각 $t\,(0<t\leq 9)$에서 두 점 P, Q의 속도는 다음의 두 경우에만 바뀐다.

- **두 점 P, Q가 만나면 만남 직후 두 점의 속도는 서로 바뀐다.**
- **두 점 P, Q 중 어떤 점의 위치가 -1또는 1이 된 직후 그 점의 속도는 부호만 바뀐다.**

이와 같은 조건 하에 시각 $t=9$에서 두 점 P, Q가 다섯 번째 만나도록 a값을 구하는 과정을 서술하고, 두 점 P, Q가 네 번째 만나는 시각 t를 구하시오. 그리고 이 네 번째 만남 직후 점 P의 속도를 구하시오.

3. 출제의도

수직선 위를 움직이는 점의 위치와 속도 및 미분계수의 기하적 의미 사이 관계를 이해하여 움직이는 점의 위치를 시간에 대한 함수로 나타내고 이와 관련된 문제를 직선의 방정식을 활용하여 해결할 수 있는지 알아보려 하였다.

4. 출제근거

고등학교 수학 II와 고등학교 미적분의 도함수의 활용에서 도함수는 움직이는 점의 위치와 속도 사이 관계를 이해하는데 필요한 개념이며 고등학교 수학의 미분계수에서 미분계수의 기하적 의미는 미분계수와 곡선 위 점에서 접선의 기울기 사이 관계를 이해하는데 필요한 개념이다. 점의 위치를 나타낸 함수의 기울기와 미분계수, 점의 속도 사이 관계를 이해하고 이를 바탕으로 직선의 방정식을 활용하여 움직이는 점의 속도 등 관련된 값들을 구하는 문제이다.

[문제2]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (2) 미분 ③ 도함수의 활용 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학 II 02-11]속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12미적02-14]속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학Ⅱ	황선욱	미래엔	2020	100
	고등학교 미적분	이준열	천재교육	2020	122

제시문【가】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (2) 미분 ① 미분계수
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학 II 02-02]미분계수의 기하적 의미를 이해한다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학Ⅱ	황선욱	미래엔	2020	57

제시문【나】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학Ⅱ02-11]속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12미적02-14]속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학Ⅱ	황선욱	미래엔	2020	100
	고등학교 미적분	이준열	천재교육	2020	122

제시문【다】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학Ⅱ02-11]속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학Ⅱ	박교식	동아출판	2020	98

제시문【라】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 (2) 기하 ② 직선의 방정식
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[10수학02-03]직선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	고성은	신사고	2020	119

5. 문항해설

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 만족해야하는 조건을 분석하여 점 Q의 초기속도 a를 찾고, 직선의 방정식 관련 계산으로 두 점 P, Q가 네 번째 만나는 시각과 이 만남 직후 점 P의 속도를 구하여 문제에 맞는 설명을 하면 된다.

6. 채점기준

[1단계] 두 점 P, Q의 위치를 각각 시각 t에 대한 함수 $f(t)$와 $g(t)$로 두고 시각 $t=0$부터 두 점이 처음 만날 때까지 $f(t)=-\frac{1}{9}t+1$, $g(t)=at-1$임을 보임.

[2단계] 문제의 조건을 분석해 $f(t)$, $g(t)$를 두 점이 다섯 번째 만날 때까지 구하고 $a=1$을 구함.

[3단계] 두 점 P,Q가 네 번째 만나는 시각 $\frac{27}{4}$을 구함.

[4단계] 이 네 번째 만남 직후 점 P의 속도 $-\frac{1}{9}$을 구함.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지를 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지를 모두 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	B
	[1단계]부터 [2단계]까지를 모두 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	C
	[1단계]부터 [2단계]까지를 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	D
하	[1단계]를 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	E
	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

[1단계] 점 P의 시각 t에서의 위치를 $f(t)$, 점 Q의 시각 t에서의 위치를 $g(t)$라고 하면 시각 $t=0$부터 두 점이 처음 만날 때까지 $f(t)=-\frac{t}{9}+1$, $g(t)=at-1$이다.

[2단계] 시각 t_i를 두 점 P,Q가 i번째 만나는 시각이라고 하면 $t_5=9$이며 $f(t)$, $g(t)$는 다음과 같다.

$f(t)=-\frac{t}{9}+1\ (0 \le t \le t_1)$, $f(t)=at-1\ (t_1 < t \le \frac{2}{a})$, $f(t)=-at+3\ (\frac{2}{a}< t \le t_2)$,
$f(t)=-\frac{t}{9}+1\ (t_2 < t \le t_3)$, $f(t)=at-5\ (t_3 < t \le \frac{6}{a})$, $f(t)=-at+7\ (\frac{6}{a}< t \le t_4)$,
$f(t)=-\frac{t}{9}+1\ (t_4 < t \le t_5)$,

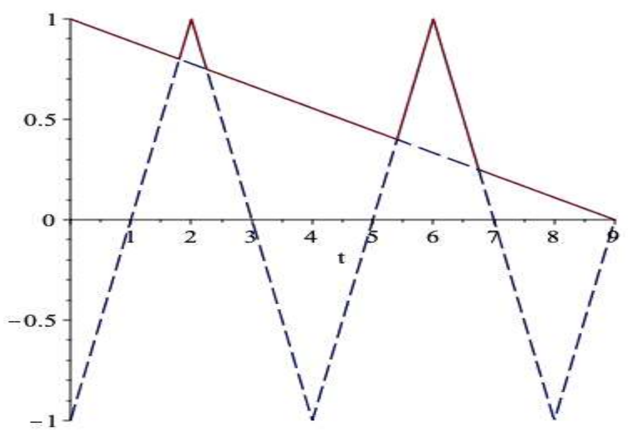
$g(t)=at-1\ (0 \le t \le t_1)$, $g(t)=-\frac{t}{9}+1\ (t_1 < t \le t_2)$, $g(t)=-at+3\ (t_2 < t \le \frac{4}{a})$,
$g(t)=at-5\ (\frac{4}{a}< t \le t_3)$, $g(t)=-\frac{t}{9}+1\ (t_3 < t \le t_4)$, $g(t)=-at+7\ (t_4 < t \le \frac{8}{a})$,
$g(t)=at-9\ (\frac{8}{a}< t \le t_5)$.
시각 $t_5=9$에서 두 점 P,Q가 만나므로 $0=f(9)=g(9)=9a-9$이고, 따라서 $a=1$이다.

[3단계] $a=1$이고 $-t_4+7=f(t_4)=g(t_4)=-\frac{1}{9}t_4+1$이므로 $t_4=\frac{27}{4}$이다.

[4단계] 네 번째 만남 직후 점 P의 속도는 시각 $t>t_4$에서 t가 t_4에 충분히 가까울 때 함수 $f(t)$의 기울기 $f'(t)=-\frac{1}{9}$와 같으므로 구하는 점 P의 속도는 $-\frac{1}{9}$이다.

***채점시 참고사항**

[2단계]에서 $f(t)$, $g(t)$의 규칙을 찾아 $a=1$을 구해내는 것이 중요하다. 참고로, $f(t)$, $g(t)$를 그래프로 나타내면 아래와 같다.($y=f(t)$:실선, $y=g(t)$:점선)



2022학년도 동국대학교 수시모집
논술전형 논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2022학년도 수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분, 부피, 미분
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

【가】 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x = f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

-『고등학교 수학II』

【나】 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 속도가 $v(t)$라고 할 때 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

-『고등학교 수학II』

【다】 닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

이다. 단, $S(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수이다.

-『고등학교 미적분』

【라】 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

-『고등학교 수학II』

【마】 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

이다. 단, $a < x < b$이다.

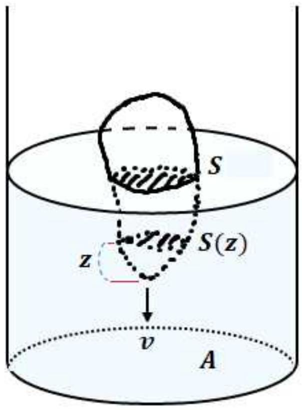
-『고등학교 수학II』

【바】 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$가 미분가능할 때 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}, \qquad y' = f'(g(x))g'(x)$$

-『고등학교 미적분』

[문제3] 밑면의 넓이가 $A\,(m^2)$인 원기둥 모양의 물통에 일정량의 물이 채워져 있다. 그리고 이 물통에 속이 꽉 들어찬 입체도형이 아래 그림과 같이 $v\,(m/s)$의 일정한 속력으로 하강하고 있다.



수면을 확장한 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이가 $S\,(m^2)$인 순간, 수면의 상승 속도를 구하시오. (단, 입체도형이 완전히 잠길 만큼 물통에 물이 많으며 또한 입체도형이 완전히 잠겨도 물이 넘치지 않을 만큼 물통이 충분히 크고, 입체도형은 회전하지 않으며 수직으로 하강한다. 그리고 입체도형의 최하단에서 거리가 $z\,(m)$인 수면에 평행한 평면으로 자른 입체도형의 단면의 넓이 $S(z)\ (m^2)$는 z에 대해 연속이다.)

3. 출제의도

입체도형의 부피를 정적분을 통해 구하고 정적분과 미분의 관계와 합성함수 미분법을 적용하여 속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

4. 출제근거

[문제 3]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (2) 미분 ③ 도함수의 활용 수학 II (3) 적분 ② 정적분의 활용 미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용 수학 II (3) 적분 ② 정적분 수학 II (3) 적분 ② 정적분 미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12수학II03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다. [12수학II03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	권오남	교학사	2020	104
	수학 II	김원경	비상교육	2020	133
	수학 II	고성은	좋은책 신사고	2020	98
	미적분	권오남	교학사	2020	177
	미적분	박교식	동아출판	2020	160
	수학 II	권오남	교학사	2020	136
	수학 II	고성은	좋은책 신사고	2020	125

제시문【가】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (2) 미분 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	권오남	교학사	2020	104
	수학 II	고성은	좋은책 신사고	2020	98

제시문【나】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (3) 적분 ② 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김원경	비상교육	2020	133

제시문【다】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (3) 적분법 ② 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오남	교학사	2020	177
	미적분	박교식	동아출판	2020	160

제시문【라】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (3) 적분 ② 정적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	권오남	교학사	2020	136
	수학 II	고성은	좋은책 신사고	2020	125

제시문【마】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (3) 적분 ② 정적분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	권오남	교학사	2020	133
	수학 II	고성은	좋은책 신사고	2020	121

제시문【바】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ② 여러 가지 미분법
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	권오남	교학사	2020	89
	미적분	박교식	동아출판	2020	82

5. 문항해설

물통 속에서 하강하는 입체도형으로 인한 수면의 상승 속도를 구하기 위해 여러 가지 풀이가 있을 수 있다. 그 중 출제 의도에 가장 잘 들어맞는 답안은 먼저 물에 잠긴 부분의 부피를 수면의 높이에 관한 정적분의 형태로 표현하는 것이다. 그 후 합성함수 미분법을 이 정적분 형태에 적용하여 정리하면 수면의 상승 속도를 구할 수 있다.

6. 채점기준

출제 의도에 가장 잘 들어맞는 답안의 풀이 순서는 다음과 같다.

[1단계] 문제를 해결하기 위해 필요한 상황, 즉 수면의 높이, 입체도형이 물에 잠긴 깊이, 입체도형의 단면의 넓이 등을 변수나 함수로 지정함.

[2단계] 물에 잠겨서 상승하게 되는 물의 부피가 입체도형의 특정한 일부분의 부피와 같다는 것을 수식으로 작성함. 예를 들어,
[첫 번째 풀이]에서

$$\int_{0}^{vt} S(x)\,dx = \int_{vt}^{z(t)} (A - S(x))\,dx$$

[두 번째 풀이]에서

$$(A - S)\Delta h = Sv\Delta t$$

까지 작성함.

[3단계] 적분으로 나타나게 되는 수식에서 적분 구간의 시작점을 통일하여 간단히 정리함.

[4단계] 적분으로 나타나는 수식에 정적분과 미분의 관계와 합성함수 미분법을 적용함.

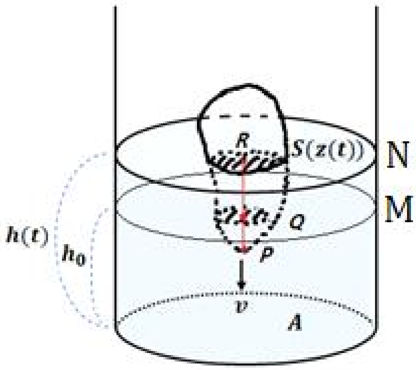
[5단계] 수면의 상승 속도에 관한 함수에 수면의 넓이가 S인 순간을 대입하여 문제를 해결함.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [5단계]까지를 모두 보인 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보인 경우	A
중	[1단계]부터 [2단계]까지를 모두 보이고 [3단계] 또는 [4단계] 둘 중에 하나만 보인 경우	B
	[1단계]부터 [2단계]까지를 모두 보인 경우	C
	[1단계]를 작성하고 [2단계]의 수식 유도를 시도만 하고 끝마치지 못한 경우	D
하	[1단계]만 작성한 경우	E
	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

[첫 번째 풀이]

입체도형이 물통의 수면에 입수하기 직전의 시각을 $t=0$이라 하고 그때 수면의 높이를 h_0라 하자. 또한,



왼쪽 그림과 같이 시간 $t \geq 0$에 대해 입체도형이 일부분 잠겨 물이 올라간 수면의 높이를 $h(t)$, 입체도형의 최하단에 있는 점 P에서 수면에 수직으로 올린 수선의 발 R까지의 높이를 $z(t)$, 수면을 확장한 평면 N으로 자른 입체도형의 단면의 넓이를 $S(z(t))$, 마지막으로 물통의 밑바닥으로부터 높이가 h_0인 평면 M에 점 P로부터 수직으로 올린 수선의 발을 Q라 하자.

그러면 입체도형이 일정한 속력 v로 하강하기 때문에 시간 t 동안 입체도형이 하강한 길이, 즉 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 vt가 된다. 또한 선분 $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이와 $\overline{\mathrm{QR}}$의 길이의 합이므로 $z(t) = vt+h(t)-h_0$를 얻는다. 마지막으로, 평면 M 아래에 있는 입체도형의 부피는 두 평면 M과 N 사이에 있는 물의 부피와 같아야 하므로 이를 수식으로 표현하면

$$\int_0^{vt} S(x)\,dx = \int_{vt}^{z(t)} (A-S(x))\,dx$$

와 같다. 이제 적분 구간을 모두 0에서 시작하는 형태로 바꾸어 정리하면

$$\int_0^{z(t)} (A-S(x))\,dx = Avt$$

를 얻는다.

이때 $z(t)$가 미분가능(아래의「채점시 평가제외 사항」참조)하므로 이 식의 양변을 t에 대해 미분하면

$$(A-S(z(t)))z'(t) = Av \quad \Rightarrow \quad z'(t) = \frac{Av}{A-S(z(t))}$$

이고, $z(t) = vt+h(t)-h_0$로부터 $h'(t)$를 구하면

$$h'(t) = z'(t)-v = \frac{S(z(t))v}{A-S(z(t))}$$

이다. 마지막으로, 문제에서 구하려는 순간의 시각을 t_1이라 하면 $S(z(t_1)) = S$이므로 그 순간 수면의 상승속도는

$$h'(t_1) = \frac{Sv}{A-S} \quad (m/s)$$

가 된다.

「채점시 평가제외 사항」

입체도형이 물통 속에 완전히 잠기는 순간의 시각을 $t=a$라 하면, $z(t)$는 열린구간 $(0, a)$에서 미분가능한 함수임을 다음처럼 보일 수 있다. 먼저

$$\int_0^{z(t)} (A - S(x))\, dx \;=\; Avt$$

로부터 $z(t)$가 연속임을 보일 수 있다. 물통이 충분히 크므로 모든 x에 대해 $0 < m \le A - S(x)$를 만족하는 양수 m이 존재한다. 따라서,

$$|Av\Delta t| \;=\; \left| \int_{z(t)}^{z(t+\Delta t)} (A - S(x))\, dx \right| \;\ge\; m|z(t+\Delta t) - z(t)|$$

이 되어 $\lim_{\Delta t \to 0} (z(t+\Delta t) - z(t)) = 0$, 즉 연속이 된다. 또한 충분히 작은 임의의 양수 Δt에 대해

$$\int_{z(t)}^{z(t+\Delta t)} (A - S(x))\, dx \;=\; Av\Delta t \;>\; 0, \qquad\qquad A - S(x) \ge m > 0$$

이므로 $z(t+\Delta t) - z(t) > 0$, 즉 증가함수이다. 이제 미분가능함을 보이기 위해

$$F(x) \;=\; \int_0^x (A - S(u))\, du$$

로 두면 $F(x)$는 미분가능하고 $F'(x) = A - S(x) \ge m > 0$이다. 이제 $z(t)$가 증가함수이므로

$$Av \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{z(t)}^{z(t+\Delta t)} (A - S(x))\, dx \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \cdot \frac{F(z(t+\Delta t)) - F(z(t))}{z(t+\Delta t) - z(t)} \right)$$

이고, $F(x)$는 미분가능하며 $z(t)$가 연속이기 때문에

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(z(t+\Delta t)) - F(z(t))}{z(t+\Delta t) - z(t)} \;=\; F'(z(t)) > 0$$

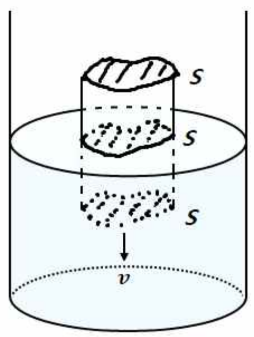
이다. 따라서

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

는 존재하고 그 극한값은 $Av/F'(z(t))$가 된다.

[두 번째 풀이]

입체도형의 단면의 넓이가 S가 되는 시각을 $t = t_1$이라 하자. 문제에서 구하라는 것은 시각 t_1일 때, 수면의 높이가 아니라 수면의 높이의 변화율이다. 즉, 시각 t_1 이전의 입체도형의 모양과 시각 t_1 이후의 입체도형의 모양은 수면의 높이의 변화율에 영향을 주지 않으므로, 아래 그림과 같이 수면에 평행한 평면으로 자른 모든 단면의 모양이 문제에서 주어진 입체도형의 단면의 모양과 동일하고 그 넓이는 S인 기둥 형태의 새로운 입체도형으로 바꾸어 수면의 높이의 변화율을 구하는 것과 같게 된다. (아래「채점시 평가제외 사항」참조)



이제 짧은 시간 Δt 동안 기둥 형태의 새로운 입체도형을 v의 속도로 하강시키면

$$(A - S)\Delta h \;=\; Sv\Delta t$$

를 만족하므로 수면의 상승 속도는

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} \;=\; \frac{Sv}{A - S} \quad (m/s)$$

가 된다.

「채점시 평가제외 사항」

입체도형의 최하단에서 수면에 평행한 평면으로 자른 입체도형의 단면까지의 높이를 z라 하고 $z=z_1$일 때 $S(z_1)=S$라 하자. 단면의 넓이 $S(z)$가 연속함수이므로 최대·최소 정리에 의해 $S(z)$는 닫힌구간 $[z_1, z_1+\Delta z]$에서 최댓값 $S_{\max}$와 최솟값 $S_{\min}$을 갖는다.

이제 $z_1 \le z \le z_1+\Delta z$인 구간에서 원래의 입체도형을 밑면의 넓이가 $S_{\max}$인 기둥 형태의 새로운 입체도형으로 변형하여 $z=z_1$이 되는 시각부터 충분히 짧은 시간 Δt 동안 이 새로운 입체도형을 하강시키면 상승하는 수면의 높이를 $\Delta h_{\max}$라 두자. 비슷하게 $z_1 \le z \le z_1+\Delta z$인 구간에서 원래의 입체도형을 밑면의 넓이가 $S_{\min}$인 기둥 형태의 새로운 입체도형으로 변형하여 $z=z_1$이 되는 시각부터 위에서 사용한 Δt 동안 이 새로운 입체도형을 하강시키면 상승하는 수면의 높이를 $\Delta h_{\min}$라 두자. 마지막으로 문제에서 주어진 원래의 입체도형을 $z=z_1$이 되는 시각부터 위와 똑같은 Δt 동안 하강시키면 상승하는 수면의 높이를 Δh라 두자. 그러면

$$\Delta h_{\min} \le \Delta h \le \Delta h_{\max}$$

를 만족함을 알 수 있다.

이제 [두 번째 풀이]처럼 $\Delta h_{\max}$와 $\Delta h_{\min}$을 구하여 위 부등식에 대입하면

$$\frac{S_{\min}v}{A-S_{\min}} \le \frac{\Delta h}{\Delta t} \le \frac{S_{\max}v}{A-S_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{\min}v}{A-S_{\min}} \le \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t} \le \frac{S_{\max}v}{A-S_{\max}}$$

를 얻는다. 이제 $\Delta z \to 0$일 때 $S_{\max} \to S(z_1)=S$와 $S_{\min} \to S$임을 이용하면 문제에서 구하고자 하는 상승속도는

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{Sv}{A-S} \quad (m/s)$$

가 된다.