동국대학교 2019년
온라인 모의논술 해설(자연계열)

[문제 1] - 수학

1. 출제의도

원뿔의 부피와 옆면의 겉넓이를 부채꼴의 넓이와 호의 길이와의 관계식을 이용하여 원뿔의 높이와 (뿔이 아래로 향할 때) 윗면의 반지름에 대한 식으로 표현할 수 있다. 부피가 일정할 때, 원뿔의 높이와 윗면의 반지름 사이의 관계를 이용하여, 겉넓이를 반지름 혹은 높이 만의 식으로 나타내고, 미분값을 구할 수 있다. 미분과 원함수와의 관계를 이용하여 겉넓이가 최소가 될 때의 반지름과 높이를 구할 수 있다.
미분의 의미, 부채꼴의 면적, 그래프의 개형을 이용한 최솟값을 이해하여 종합적으로 사고할 수 있는지를 알아보았다.

2. 제시문 및 문항 출제근거

가. 제시문별 출제근거

1) 문제 1 - 제시문【가】

<table>
<tr><td rowspan="2">적용
교육과정</td><td colspan="5">2009 개정교육과정 미적분 II</td></tr>
<tr><td colspan="5">미적분 II (다) 미분법 [2] 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 구할 수 있다. (88쪽)</td></tr>
<tr><td>과목명</td><td colspan="5">고등학교 미적분 II</td></tr>
<tr><td>핵심 개념
및 용어</td><td colspan="5">함수의 그래프의 개형, 원뿔의 부피와 넓이</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td colspan="5">미적분 II (다) 미분법 [2] 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 구할 수 있다.
미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (45쪽)</td></tr>
<tr><td>출처</td><td>도서명</td><td>저자</td><td>발행처</td><td>발행년도</td><td>쪽수</td></tr>
<tr><td>고등학교
교과서</td><td>미적분II</td><td>이강섭 외 14인</td><td>㈜ 미래엔</td><td>2016</td><td>141</td></tr>
<tr><td>기타</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2) 문제 1 - 제시문 **【나】**

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="5">2009 개정교육과정 미적분II
미적분 II (나) 삼각함수 1 삼각함수의 뜻과 그래프 ① 일반각과 호도법의 뜻을 안다. (87쪽)</td></tr>
<tr><td>과목명</td><td colspan="5">고등학교</td></tr>
<tr><td>핵심 개념
및 용어</td><td colspan="5">호도법, 부채꼴의 넓이와 호의 길이</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td colspan="5">미적분 II (나) 삼각함수 1 삼각함수의 뜻과 그래프 ① 일반각과 호도법의 뜻을 안다. 미적2211-2. 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. (42쪽)</td></tr>
<tr><td>출처</td><td>도서명</td><td>저자</td><td>발행처</td><td>발행년도</td><td>쪽수</td></tr>
<tr><td>고등학교
교과서</td><td>미적분II</td><td>김원경 외 11인</td><td>㈜ 비상교육</td><td>2016</td><td>49</td></tr>
<tr><td>기타</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

3) 문제 1 - 제시문 **【다】**

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="5">2009 개정교육과정 미적분 I
미적분 I (다) 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (79쪽)</td></tr>
<tr><td>과목명</td><td colspan="5">고등학교 미적분 I</td></tr>
<tr><td>핵심 개념
및 용어</td><td colspan="5">미분과 함수의 증감</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td colspan="5">미적분 I (다) 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (38쪽)</td></tr>
<tr><td>출처</td><td>도서명</td><td>저자</td><td>발행처</td><td>발행년도</td><td>쪽수</td></tr>
<tr><td rowspan="2">고등학교
교과서</td><td>미적분 I</td><td>황선욱 외</td><td>㈜ 좋은책 신사고</td><td>2016</td><td>117</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>기타</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

나. 문항별 출제근거

적용 교육과정	2009 개정교육과정 미적분II 미적분 II (다) 미분법 [2] 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 구할 수 있다. (88쪽)				
과목명	고등학교 미적분 II				
핵심 개념 및 용어	미분과 함수의 증가, 감소, 부채꼴의 면적				
성취기준	미적분 II (다) 미분법 [2] 도함수의 활용 ② 함수의 그래프의 개형을 구할 수 있다. 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. (45쪽)				
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
교과서 내	미적분II	이강섭 외 14인	㈜ 미래엔	2016	141
	미적분II	김원경 외 11인	㈜ 비상교육	2016	49
	미적분 I	황선욱 외	㈜ 좋은책 신사고	2016	117
교과서 외					
관련교과서 근거					

3. 제시문 및 문항 해설(분석)

【가】는 아이스크림 콘의 생산비가 옆넓이에 비례함에 대해 설명하였고, 【나】는 아이스크림 콘의 겉넓이를 계산하기 위해 필요한 부채꼴의 크기에 대한 관계식을 설명하였다. 【다】는 함수의 증감과 미분사이의 관계에 대한 설명이다.
문제 1은 아이스크림 콘의 부피가 일정할 때, 겉면적을 최소로 해서 생산비를 최소로 하기위한 콘의 윗면 반지름과 높이의 값을 구하는 문제이다. 일정한 부피로부터 윗면 반지름과 높이의 관계식을 얻을 수 있고, 겉면적을 윗면 반지름 혹은 콘의 높이만의 함수로 표현하고, 미분값을 구하여, 최솟값과 그때의 반지름의 길이와 콘의 높이를 구할 수 있는가를 파악하는 문제이다.

4. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td></td><td>
(1단계)
밑면의 반지름의 길이가 r 이고, 높이가 h 인 원뿔모양 아이스크림 콘의 부피 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ 를 구할 수 있다.
(2단계)
제시문 【나】를 이용하여 아이스크림 콘의 겉넓이 $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ 를 구할 수 있다.
(3단계)
아이스크림 콘의 부피가 일정한 사실을 이용하여 h 와 r의 관계식을 구하고, 겉넓이 S 를 r 만의 식 (혹은 h 만의 식)
$$S=\pi r\sqrt{r^2+\frac{2\cdot 3^6\cdot \pi^6}{r^4}}=\sqrt{\pi^2 r^4+\frac{2\cdot 3^6\cdot \pi^8}{r^2}}$$
으로 표현할 수 있다.
(4단계)
이때 S 를 r 에 대해 (혹은 h에 대해) 미분할 수 있다.
$$\frac{dS}{dr}=\frac{4\pi^2 r^3-\frac{4\cdot 3^6\cdot \pi^8}{r^3}}{2\sqrt{\pi^2 r^4+\frac{2\cdot 3^6\cdot \pi^8}{r^2}}}=\frac{2\pi^2(r^6-(3\pi)^6)}{r^2\sqrt{\pi^2 r^6+2\cdot 3^6\cdot \pi^8}}.$$
(5단계)
제시문【다】를 이용하여 S 가 최소가 될 때 $r=3\pi$, $h=3\sqrt{2}\pi$ 를 구할 수 있다.
</td><td></td></tr>
</table>

상	S	(1단계)부터 (5단계)까지를 모두 보이고, 논증이 매끄럽고 설득력있는 경우
	A	(1단계)부터 (5단계)까지를 모두 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우
중	B	(1단계)부터 (4단계)까지의 과정을 기술한 경우
	C	(1단계)부터 (3단계)까지의 과정을 기술한 경우
	D	(1단계)부터 (2단계)까지의 과정을 기술한 경우
하	E	위 단계 중 한 가지만 기술한 경우
	F	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우

5. 모범답안(예시답안)

밑면의 반지름의 길이가 r 이고, 높이가 h 인 원뿔 모양 아이스크림 콘의 부피를 V, 겉넓이를 S 라고 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$$

이다. 옆면을 펼쳤을 때, 생기는 부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면, 부채꼴의 넓이는 아이스크림 콘의 겉넓이 S 이고, 부채꼴의 반지름의 길이 $R=\sqrt{r^2+h^2}$ 임을 알 수 있다. 호의 길이 l 은 윗면 원의 둘레와 같으므로 $l=2\pi r$ 이다. 따라서, 부채꼴의 넓이 즉, 겉넓이 S 는 제시문 【나】 에 의해

$$S=\frac{1}{2}Rl=\pi r\sqrt{r^2+h^2}.$$

원뿔모양 아이스크림 콘의 일정한 부피가 $9\sqrt{2}\pi^4$ 이므로, 식 (1)에서

$$h=\frac{27\sqrt{2}\pi^3}{r^2} \qquad (2)$$

이다. 이 때

$$S=\pi r\sqrt{r^2+\frac{2\cdot 3^6\cdot \pi^6}{r^4}}=\sqrt{\pi^2 r^4+\frac{2\cdot 3^6\cdot \pi^8}{r^2}}.$$

이때 S 를 r 에 대해 미분하면

$$\frac{dS}{dr}=\frac{4\pi^2 r^3-\dfrac{4\cdot 3^6\cdot \pi^8}{r^3}}{2\sqrt{\pi^2 r^4+\dfrac{2\cdot 3^6\cdot \pi^8}{r^2}}}=\frac{2\pi^2(r^6-(3\pi)^6)}{r^2\sqrt{\pi^2 r^6+2\cdot 3^6\cdot \pi^8}}.$$

$\dfrac{dS}{dr}$은 $r > 3\pi$ 이면 양수이고, $r < 3\pi$ 이면 음수이다. 따라서 제시문 **【다】**에 의해 S 는 $r > 3\pi$ 일 때 증가하고, $r < 3\pi$ 일 때 감소한다. 따라서, S 가 최소가 될 때, $r = 3\pi$ 이다. 이때 높이 h는 식 (2)에 의해

$$h = \frac{27\sqrt{2}\pi^3}{r^2} = 3\sqrt{2}\pi$$

이다.

※ 유의사항

식 (2)에서 r을 h로 표현하면

$$r^2 = \frac{27\sqrt{2}\pi^3}{h} \quad , \quad S = \sqrt{\frac{2\cdot 3^6\cdot \pi^8}{h^2} + 27\sqrt{2}\pi^5 h} \ .$$

이때 S 를 h 에 대해 미분하면

$$\frac{dS}{dh} = \frac{27\sqrt{2}\pi^5 - \dfrac{4\cdot 3^6\cdot \pi^8}{h^3}}{2\sqrt{\dfrac{2\cdot 3^6\cdot \pi^8}{h^2} + 27\sqrt{2}\pi^5 h}} = \frac{27\sqrt{2}\pi^5 (h^3 - (3\sqrt{2}\pi)^3)}{2h^2\sqrt{27\sqrt{2}\pi^5 h^3 + 2\cdot 3^6\cdot \pi^8}} .$$

$\dfrac{dS}{dh}$은 $h > 3\sqrt{2}\pi$ 이면 양수이고, $h < 3\sqrt{2}\pi$ 이면 음수이다. 따라서 제시문 **【다】**에 의해 S 는 $h > 3\sqrt{2}\pi$ 일 때 증가하고, $h < 3\sqrt{2}\pi$ 일 때 감소한다. 따라서, S 가 최솟값을 가질 때 $h = 3\sqrt{2}\pi$ 이고, $r = 3\pi$ 이다.

[문제 2] - 수학

1. 출제의도

연속확률변수의 확률함수인 확률밀도함수를 이용하여 다음을 평가하고자 함.

1. 역함수를 구하기
2. 미분을 통한 함수의 최솟값과 최댓값 구하기
3. 함수의 (부정) 적분 구하기

이를 통해 함수의 의미와 미적분의 이해도를 확인하고자 함.

2. 제시문 및 문항 출제근거

가. 제시문별 출제근거

1) 문제 2 - 제시문 **【가】**

적용 교육과정	2009 개정 교육과정 확률과 통계 (다) 통계 [1] 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. (70쪽)				
과목명	확률과 통계				
핵심 개념 및 용어	확률밀도함수				
성취기준	확률과 통계 (다) 통계 [1] 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. 확통1311-2. 연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻을 안다. (32쪽)				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
교과서 내*	확률과 통계	정상권	금성출판사	2016	141
	확률과 통계	김원경	비상교육	2016	106
교과서 외					
관련교과서 근거**					

2) 문제 2 - 제시문 【나】

적용 교육과정	2009 개정 교육과정 수학 II (나) 함수 [1] 함수 ③ 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. (60쪽)				
과목명	수학 II				
핵심 개념 및 용어	역함수				
성취기준	수학 II (나) 함수 [1] 함수 ③ 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. 수학2213 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. (23쪽)				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
교과서 내	수학 II	신항균	지학사	2016	85
	수학 II	이준열	천재교육	2016	76
교과서 외					
관련교과서 근거					

3) 문제 2 - 제시문 【다】

적용 교육과정	2009 개정 교육과정 미적분 I (다) 다항함수의 미분법 [3] 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (79쪽)				
과목명	미적분 II				
핵심 개념 및 용어	함수의 증가, 감소				
성취기준	미적분 I (다) 다항함수의 미분법 [3] 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (38쪽)				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
교과서 내	미적분 I	황선욱	좋은책신사고	2016	117
	미적분 I	우정호	동아출판	2016	144
교과서 외					
관련교과서 근거					

나. 문항별 출제근거

적용 교육과정	2009 개정 교육과정 미적분 Ⅰ (다) 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (79쪽)				
과목명	미적분 Ⅱ				
핵심 개념 및 용어	함수의 증가, 감소				
성취기준	미적분 Ⅰ (다) 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. (38쪽)				
예상 소요 시간	30분 / 전체 100분				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
교과서 내	미적분 Ⅰ	황선욱	좋은책신사고	2016	117
	미적분 Ⅰ	우정호	동아출판	2016	144
교과서 외					
관련교과서 근거					

3. 제시문 및 문항 해설(분석)

1. 제시문 **【나】**: 확률밀도함수의 역함수의 부정적분을 구한 후 $k=g(b)$를 구함.
2. 제시문 **【다】**: $g'(b)$를 구하여 함수의 증가와 감소 영역 확인함.
3. 문제에서 제시된 확률에 관한 조건을 이용하여 b의 영역 확인함.

4. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	Step 1. 역함수 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{b}\ln\frac{x}{b}$ 구하여 다음을 구한다. $$k=\int_1^b -\frac{1}{b}\ln\frac{x}{b}dx=\int_{\frac{1}{b}}^1 -\ln y dy = -y\ln y + y\Big\vert_{\frac{1}{b}}^{1} = \frac{1}{b}\ln\frac{1}{b}-\frac{1}{b}+1$$ Step 2. k는 $g(b)=\frac{1}{b}\ln\frac{1}{b}-\frac{1}{b}+1$로 볼 수 있고, $g'(b)=\frac{1}{b^2}\ln b$는 b가 1보다 작은 경우엔 음수이므로 $g(b)$는 감소함수임을 확인한다. Step 3. X가 1보다 작을 확률이 $\frac{1}{3}$보다 작음을 이용하여 다음을 확인한다. $$P(X<1)=\int_0^1 be^{-bx}dx = e^{-bx}\Big\vert_1^0 = 1-e^{-b}\le\frac{1}{3}$$ $$b\le\ln\frac{3}{2}<\ln e = 1$$ Step 4. X가 2보다 작을 확률이 $\frac{1}{2}$보다 크거나 같음을 이용한다. $$P(X<2)=\int_0^2 be^{-bx}dx = 1-e^{-2b}\ge\frac{1}{2}$$ $$b\ge\ln\sqrt{2}$$ Step 5. 3과 4의 결과를 정리하면 b는 0과 1사이이고 그 범위는 다음과 같이 구한다. $$0<\ln\sqrt{2}\le b\le\ln\frac{3}{2}<1$$ Step 6. 따라서 k의 최댓값은 $b=\ln\sqrt{2}$일 때 $g(\ln\sqrt{2})$, 최솟값은 $b=\ln\frac{3}{2}$일 때 $g\left(\ln\frac{3}{2}\right)$임을 알 수 있다.	

상	S	(1단계)부터 (6단계)까지를 모두 보이고, 논증이 매끄럽고 설득력있는 경우.
	A	(1단계)부터 (6단계)까지를 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우
중	B	위 단계 중 5가지 기술한 경우
	C	위 단계 중 4가지 기술한 경우
	D	위 단계 중 3가지 기술한 경우
하	E	위 단계 중 한 가지만 기술한 경우
	F	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우

5. 모범답안(예시답안)

$f(x)$의 역함수는 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{b}\ln\frac{x}{b}$이다.

k를 구하기 위해 $x=by$로 치환하여 다음과 같이 적분한다.

$$k=\int_1^b -\frac{1}{b}\ln\frac{x}{b}dx=\int_{\frac{1}{b}}^1 -\ln y dy=-y\ln y+y\Big|_{\frac{1}{b}}^1=\frac{1}{b}\ln\frac{1}{b}-\frac{1}{b}+1$$

k는 b의 함수 $g(b)=\frac{1}{b}\ln\frac{1}{b}-\frac{1}{b}+1$로 볼 수 있고, 일계도함수는 $g'(b)=\frac{1}{b^2}\ln b$이다. $g'(1)=0$이고 $0<b<1$에서 $g'(b)<0$이므로 $g(b)$는 감소함수이고, $b>1$에서는 $g'(b)>0$이므로 $g(b)$는 증가함수이다.

다음으로 X가 1보다 작을 확률 $P(X<1)=\int_0^1 be^{-bx}dx=e^{-bx}\Big|_1^0=1-e^{-b}\le\frac{1}{3}$으로부터 $b\le\ln\frac{3}{2}<\ln e=1$을 알 수 있다. 그리고 2보다 작을 확률은 $\frac{1}{2}$보다 작지 않기 때문에 $P(X<2)=\int_0^2 be^{-bx}dx=1-e^{-2b}\ge\frac{1}{2}$이어서 $b\ge\ln\sqrt{2}$이다. 즉, b의 범위는 $0<\ln\sqrt{2}\le b\le\ln\frac{3}{2}<1$이다.

b의 범위는 1보다 작으므로 k의 최댓값은 b의 하한인 $\ln\sqrt{2}$일 때, 최솟값은 b의 상한인 $\ln\frac{3}{2}$일 때이다. 즉 최댓값과 최솟값은 각각 $g(\ln\sqrt{2})$와 $g\left(\ln\frac{3}{2}\right)$이다.

[문제 3] - 수학

1. 출제의도

벡터와 공간의 개념을 이해하고, 주어진 평행이 아닌 두 벡터로부터 서로 수직인 세 단위벡터를 구하고, 공간의 임의의 벡터를 서로 수직인 세 단위벡터로 나타낼 수 있는 지를 평가하고자 하였다. 벡터의 내적을 활용하여 주어진 평행이 아닌 두 벡터로부터 이 두 벡터를 포함한 평면에서 서로 수직인 두 단위 벡터를 만들고, 평면 바깥에서 이 두 벡터에 수직인 단위벡터를 만들어 공간에서 서로 수직인 세 벡터를 만들 수 있는 문제를 출제하였다.

2. 제시문 및 문항 출제근거

가. 제시문별 출제근거

1) 문제 3 - 제시문 **【가】**

적용 교육과정	2009 개정교육과정 기하와 벡터 기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 3 공간벡터 ② 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. (97쪽)				
과목명	고등학교 기하와 벡터				
핵심 개념 및 용어	공간벡터의 내적				
성취기준	기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 3 공간벡터 ① 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 기벡1331. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. (51쪽)				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외 14인	㈜ 교학사	2016	167
기타					

2) 문제 3 - 제시문 **【나】**

적용 교육과정	2009 개정교육과정 기하와 벡터 기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 ③ 공간벡터 ③ 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (97쪽)				
과목명	고등학교 기하와 벡터				
핵심 개념 및 용어	공간벡터의 내적				
성취기준	기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 ③ 공간벡터 ② 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (51쪽)				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
고등학교 교과서	기하와 벡터	김창동 외 14인	㈜ 교학사	2016	169,170
기타					

3) 문제 3 - 제시문 **【다】**

적용 교육과정	2009 개정교육과정 기하와 벡터 기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 ③ 공간벡터 ③ 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (97쪽)				
과목명	고등학교 기하와 벡터				
핵심 개념 및 용어	공간벡터의 수직 조건				
성취기준	기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 ③ 공간벡터 ② 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (51쪽)				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
고등학교 교과서	기하와 벡터	류희찬 외 17인	㈜ 천재교과서	2016	182
기타					

4) 문제 3 - 제시문 **【라】**

적용 교육과정	2009 개정교육과정 기하와 벡터 기하와 벡터 (가) 공간도형과 공간벡터 $\boxed{1}$ 공간도형 ① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. (97쪽)				
과목명	고등학교 기하와 벡터				
핵심 개념 및 용어	직선과 평면의 수직				
성취기준	기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 $\boxed{1}$ 공간도형 ① 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다. 기벡1311. 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.(49쪽)				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
고등학교 교과서	기하와 벡터	신항균 외 11인	㈜ 지학사	2016	134
기타					

나. 문항별 출제근거

적용 교육과정	2009 개정교육과정 기하와 벡터 기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 $\boxed{3}$ 공간벡터 ③ 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (97쪽)				
과목명	고등학교 기하와 벡터				
핵심 개념 및 용어	공간벡터의 수직 조건				
성취기준	기하와 벡터 (다) 공간도형과 공간벡터 $\boxed{3}$ 공간벡터 ② 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (51쪽)				
예상 소요 시간	40분 / 전체 100분				
출처	**도서명**	**저자**	**발행처**	**발행년도**	**쪽수**
교과서 내	기하와 벡터	김창동 외 14인	㈜ 교학사	2016	167,170
	기하와 벡터	정상권 외 7인	㈜ 금성출판사	2016	169
	기하와 벡터	류희찬 외 17인	㈜ 천재교과서	2016	182
	기하와 벡터	신항균 외 11인	㈜ 지학사	2016	134
교과서 외					
관련교과서 근거					

3. 제시문 및 문항 해설(분석)

【가】와 【나】는 각각 벡터의 크기와 내적에 대해 설명하였고, 【다】는 벡터의 수직과 벡터의 내적과의 관계에 대해 설명하였다. 【라】는 어떤 직선이 한 평면위의 서로 다른 두 직선과 수직이면 그 평면과 수직임을 설명하였다.

문제 3은 공간에서 한 단위 벡터와 이 벡터와 평행이 아닌 벡터가 주어졌을 때 두 벡터로 이루어진 평면에서 이 단위 벡터에 수직인 단위 벡터를 찾고 이 평면에 수직인 다른 단위 벡터를 찾아서 세 개의 서로 수직인 단위 벡터를 만들 수 있고, 이 서로 수직인 세 단위 벡터로 공간의 임의의 벡터를 표현하는 문제이다.

4. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	※ 문제 풀이 **(1단계)** 벡터 $\vec{b}$ 의 종점을 B 라고 하고 B 에서 벡터 $\vec{a}$ 에 내린 수선의 발을 C라고 할 때, 벡터 $\vec{c}$ 는 $\dfrac{\overrightarrow{CB}}{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert}, -\dfrac{\overrightarrow{CB}}{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert}$ 중에 x-좌표가 양인 벡터이다. (2단계) 벡터의 내적을 이용하여 $$\vec{c}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$ 를 구할 수 있다. (3단계) $\vec{d}=(f,g,h)$ 라 하고 $$f+g+h=0,\ f+g-2h=0,\ f^2+g^2+h^2=1, f>0$$ 을 유도한다. (4단계) 방정식을 풀어서 $$\vec{d}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$$ 를 구한다. (5단계) 벡터의 내적 및 세 벡터가 서로 수직인 단위 벡터임을 이용하여 $$\vec{e}=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\vec{a}+\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}\vec{c}+\frac{x-y}{\sqrt{2}}\vec{d}$$ 을 유도한다.	

상	S	(1단계)부터 (5단계)까지를 모두 보이고, 논증이 매끄럽고 설득력있는 경우
	A	(1단계)부터 (5단계)까지를 모두 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우
중	B	(1단계)부터 (4단계)까지의 과정을 기술한 경우
	C	(1단계)부터 (3단계)까지의 과정을 기술한 경우
	D	(1단계)부터 (2단계)까지의 과정을 기술한 경우
하	E	위 단계 중 한 가지만 기술한 경우
	F	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우

5. 모범답안(예시답안)

벡터 $\vec{b}$ 의 종점을 B 라고 하고 B 에서 벡터 $\vec{a}$ 에 내린 수선의 발을 C라고 할 때, 벡터 $\vec{c}$ 는 $\dfrac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}, -\dfrac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$ 중에 x-좌표가 양인 벡터이며, 벡터 $\vec{a}$ 와 벡터 $\vec{b}$ 가 이루는 평면에서 단위 벡터 $\vec{a}$ 에 수직인 벡터이다. 이 때,

$$\overrightarrow{OC}=|\vec{b}|\cos(\angle BOC)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$$

이다. 여기서 【나】와 $\vec{a}$가 단위 벡터임을 이용하였다. 따라서,

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$\vec{c}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

이다. $\vec{c}$ 의 x-좌표는 양수이다.

【라】에 의해 벡터 $\vec{a}$ 와 벡터 $\vec{c}$ 에 수직이면 이 두 벡터를 포함한 평면에 수직이다. $\vec{d}=(f,g,h)$ 라 하고, 벡터 $\vec{a}$ 와 벡터 $\vec{c}$ 에 수직이라는 것과 크기가 1이고, x-좌표가 양이므로

$$f+g+h=0,\ f+g-2h=0,\ f^2+g^2+h^2=1, f>0$$

을 만족하므로

$$\vec{d}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$$

이다. 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ 는 서로 수직인 공간 벡터이므로 임의의 벡터 $\vec{e}$ 를 표현할 수 있다.

$$\vec{e}=k\vec{a}+l\vec{c}+m\vec{d}$$

이라면 양변을 벡터 $\vec{a}$ 로 내적하면

$$\vec{a}\cdot\vec{e}=k\vec{a}\cdot\vec{a}+l\vec{a}\cdot\vec{c}+m\vec{a}\cdot\vec{d}=k$$

이다. 마찬가지로. 양변을 벡터 $\vec{c}$ 로 내적하면

$$l=\vec{c}\cdot\vec{e}$$

이고, 양변을 벡터 $\vec{d}$ 로 내적하면

$$m=\vec{d}\cdot\vec{e}$$

이다, 따라서,

$$k=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}},l=\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}},m=\frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

이므로

$$\vec{e}=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\vec{a}+\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}\vec{c}+\frac{x-y}{\sqrt{2}}\vec{d}.$$

※ 유의사항

벡터 $\vec{c}$ 를 구할 때와 벡터 $\vec{e}$ 를 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ 로 표현할 때 공간 좌표를 이용하여 다음과 같이 구할 수 도 있다.

벡터 $\vec{c}$ 가 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 평면에 있으므로 어떤 두 상수 p,q에 대해

$$\vec{c}=\sqrt{3}p\vec{a}+q\vec{b}=(p+q,p+q,p)$$

로 나타낼 수 있다. 벡터$\vec{a}$ 와 수직이고, 크기가 1이고, x-좌표가 양임을 이용하면

$$3p+2q=0,2(p+q)^2+p^2=1,p+q>0$$

이고, 이를 풀면 $p=-\frac{\sqrt{6}}{3},q=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 이고,

$$\vec{c}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

이다.

$\vec{e}=k\vec{a}+l\vec{c}+m\vec{d}$ 이라고 변수들의 관계식을 구하면

$$x=\frac{k}{\sqrt{3}}+\frac{l}{\sqrt{6}}+\frac{m}{\sqrt{2}},y=\frac{k}{\sqrt{3}}+\frac{l}{\sqrt{6}}+\frac{-m}{\sqrt{2}},z=\frac{k}{\sqrt{3}}+\frac{-2l}{\sqrt{6}}$$

이므로, 연립해서 풀면

$$k=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}},l=\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}},m=\frac{x-y}{\sqrt{2}},.$$

$$\vec{e}=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\vec{a}+\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}\vec{c}+\frac{x-y}{\sqrt{2}}\vec{d}$$

이다.