2023학년도 논술고사

자연계열(오후)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 2

[문제 1-1]

(1) $f(x)=ax^2(x-1)^2$ (단, a는 0이 아닌 실수)라 둘 수 있다. 따라서 $x=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$가 극댓값을 가지고 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2^4}=2^{10}$ 이므로 $a=2^{14}$이다. 따라서 $f(x)=2^{14}x^2(x-1)^2$이므로 다음이 성립한다.

$$\log f(6)=\log(2^{16}3^2 5^2)=2+14A+2B$$

(2) 닫힌구간 $[0,p]$에서 평균값 정리에 의하면, $f'(a)=\frac{f(p)-f(0)}{p-0}=\frac{2023}{p}$인 a가 열린구간 $(0,p)$에 존재한다. 닫힌구간 $[p,1]$에서 평균값 정리에 의하면, $f'(b)=\frac{f(1)-f(p)}{1-p}=\frac{2023}{p-1}$인 b가 열린구간 $(p,1)$에 존재한다. 이때, $\int_a^b f''(x)\,dx=f'(b)-f'(a)$ 이므로 $\int_a^b f''(x)dx=\frac{2023}{p-1}-\frac{2023}{p}=\frac{2023}{p(p-1)}$ 인 두 실수 a, b가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다.

[문제 1-2]

(1) 치환적분을 이용하면 아래가 성립한다.

$$\int_0^2 s(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 h(x-1)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 h(t)dt\ \ (t=x-1\text{로 치환})$$
$$=\int_0^1 \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx+\int_0^1 (xe^{x^2-1}-x)\,dx$$

각 정적분을 계산하면 아래와 같다.

$$\int_0^1 \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[-\frac{1}{2\pi}\cos^4\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1=\frac{1}{2\pi}$$
$$\int_0^1 (xe^{x^2-1}-x)\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{2e}$$

따라서 구하고자 하는 정적분값은 $\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{2e}$이다.

(2) 합성함수의 미분법과 곱의 미분법에 의해서 $G'(x)=p'(q(x))q'(x)+p'(x)q(x)+p(x)q'(x)$이고 $H'(x)=q'(r(x))r'(x)+2r'(x)$이다. 따라서

$$G'(0)=p'(0)q'(0)+p'(0)q(0)+p(0)q'(0)=ac,$$
$$G'(1)=p'(0)q'(1)+p'(1)q(1)+p(1)q'(1)=ad,$$
$$H'(0)=q'(0)r'(0)+2r'(0)=ce+2e,$$
$$H'(1)=q'(0)r'(1)+2r'(1)=cf+2f$$

이므로 $G(x)$는 $\ll ac,ad\gg$-좋은함수이고 $H(x)$는 $\ll ce+2e,cf+2f\gg$-좋은함수이다. 따라서 $S(x)$가 $\ll n,24\gg$-좋은함수이므로 $ac=n$, $ad=24=(c+2)e$ 를 만족해야 한다. a는 24의 약수이고 a, d가 모두 9 이하의 자연수이므로 a로 가능한 수는 3, 4, 6, 8이며 각 a마다 대응되는 d가 유일하게 결정된다. 같은 방식으로 $c+2$ 역시 3, 4, 6, 8만 가능하고 마찬가지로 $c+2$에 대응되는 e가 유일하게 결정된다. ac가 24의 약수가 되어야 하므로 가능한 순서쌍 (a,c)는 $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,6)$, $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,4)$, $(8,1)$로 10가지이다. 한편, b와 f는 9이하의 모든 자연수가 가능하므로 구하는 경우의 수는 $10\times9\times9=810$ 이다.

[문제 2-1]

(1) 문제의 조건에 의해, 닫힌구간 $[-2,2]$에서 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

따라서, $f'(x)=3(x^2-a)=0$이 $[-2,2]$에서 두 실근을 가지므로 $0<a<4$이고, $f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})<0$ 이어야 한다. 이때, $f(-\sqrt{a})=a(1+2\sqrt{a})>0$이므로 $f(\sqrt{a})=a(1-2\sqrt{a})<0$이다. 따라서 $a>\dfrac{1}{4}$이다. 또한 $f(-2)=-8+7a\le 0$이므로 $a\le\dfrac{8}{7}$이다. 따라서 실수 a의 값의 범위는 $\dfrac{1}{4}<a\le\dfrac{8}{7}$이다.

(2) $a=1$일 때 $f(-2)=f(\sqrt{a})=0$, $f(-\sqrt{a})=f(2)=4$이므로 $|f(x)|$의 최댓값은 4이다.
$a<1$이면 $f(2)=10-6a>4$, $a\ge 4$이면 $f(-2)=6a-6>4$이므로 $|f(x)|$의 최댓값은 4 보다 크다.
$1<a<4$이면 $f(-\sqrt{a})=2(a\sqrt{a}+1)>4$이다. 따라서, $a\ne 1$일 때 $|f(x)|$의 최댓값은 4 보다 크다.
따라서 $a=1$일 때 $|f(x)|$의 최댓값이 가장 작고, 그때의 $|f(x)|$의 최댓값은 4이다.

[문제 2-2]

(1) 문제의 조건으로부터, 이차방정식 $f(t)=t^2+at+b=0$의 두 실근은 모두 양수이고 A^2보다 크다. 이때, 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 $-a>2A^2$이다. $F'(x)=2x(x^2+a)$이므로 방정식 $F'(x)=0$의 실근은 $x=0$ 또는 $\pm\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$이다. 즉, 0이 아닌 실근의 절댓값은 $\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$이고 이 값은 A보다 크다.

(2) 이차함수 $f(x)=x^2-x+c$라 두자. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근을 가지므로 $s=-p,\ r=-q>0$이다. 따라서, 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 r^2, s^2이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 $r^2+s^2=1,\ r^2s^2=c$를 만족한다. 한편

$$0=\int_{-s}^{s}(x^4-x^2+c)\,dx=2\left(\frac{1}{5}s^5-\frac{1}{3}s^3+cs\right)$$

이므로 $c=s^2(1-s^2)$를 대입하여 풀면 $s^2=\dfrac{5}{6}$ 이므로 $c=\dfrac{5}{36}$이다.

(3) $L(x)=c(x-m)+d$라 두면 $G(x)=x^4-4x^3+9x-\dfrac{11}{2}=(x-m)^4+a(x-m)^2+b+c(x-m)+d$ 이다. 양변의 계수를 비교하면 $m=1$, $a=-6$, $c=1$이고 $b+d=\dfrac{1}{2}$ 이다. 따라서

$$G(x)=(x-1)^4-6(x-1)^2+(x-1)+\frac{1}{2}=F(x-1)+L(x)$$

이므로 구하는 $F(x)$와 $L(x)$는 모든 실수 b에 대하여

$$F(x)=x^4-6x^2+b,\ L(x)=(x-1)+\frac{1}{2}-b=x-\frac{1}{2}-b$$

이다. 한편, 방정식 $G(x)-L(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지면 방정식 $F(x)=0$도 서로 다른 네 실근을 갖는다. 조건으로부터 방정식 $F(x)=0$의 가장 큰 실근은 $t-m=t-1>0$이다. ③으로부터

$$0=\int_1^t F(x-1)\,dx=\int_0^{t-1}F(x)\,dx=\int_0^{t-1}(x^4-6x^2+b)\,dx=\frac{(t-1)^5}{5}-2(t-1)^3+b(t-1)$$

이고 $0=F(t-1)=(t-1)^4-6(t-1)^2+b$이다. 이 두 방정식을 연립하며 풀면 $t=1+\sqrt{5}$이고 $b=5$이므로 구하는 일차함수는 $L(x)=x-\dfrac{11}{2}$이다.

2023학년도 논술고사

자연계열(오후)
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 2

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$f(x)$가 $ax^2(x-1)^2$의 형태를 가지는 것을 확인	3점
	$x=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$가 극댓값을 가지는 것을 확인	2점
	$a=2^{14}$를 계산	2점
	$\log f(6)=2+14A+2B$를 계산	5점
[1-1] (2)	$\int_a^b f''(x)dx=f'(b)-f'(a)$임을 확인	3점
	$f'(a)=\frac{f(p)}{p}=\frac{2023}{p}$인 a가 $(0,p)$에 존재함을 보임	3점
	평균값의 정리를 사용하여 $f'(b)=\frac{f(p)}{p-1}=\frac{2023}{p-1}$인 b가 열린구간 $(p,1)$에 존재함을 보임	4점
	위 세 가지 결과와 $\frac{2023}{p-1}-\frac{2023}{p}=\frac{2023}{(p-1)p}$을 이용하여 증명	3점
[1-2] (1)]	$\int_0^2 s(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 h(x)$임을 관찰	4점
	$\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2\pi}$임을 계산	4점
	$\int_0^1 h(x)dx=-\frac{1}{2e}$임을 계산	4점
[1-2] (2)	$ac=n$임을 확인	3점
	$ad=(c+2)e=24$임을 확인	3점
	순서쌍 (a,c)의 경우가 10가지가 있다는 것을 구함	4점
	b와 f가 모든 수가 다 되어서 전체 경우의 수가 $9\times9=81$의 배수임을 관찰	2점
	정확한 경우의 수 810을 계산	1점

2023학년도 자연계열(오후) 채점기준

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$0<a<4$임을 구함	2점
	$a>\frac{1}{4}$ 임을 구함	3점
	$a \le \frac{8}{7}$ 임을 구함	3점
	$\frac{1}{4}<a \le \frac{8}{7}$ 임을 구함	2점
[2-1] (2)	a값의 범위에 따라 구간을 나눔	1점
	$\lvert f(-2)\rvert$, $\lvert f(-\sqrt{a})\rvert$, $\lvert f(\sqrt{a})\rvert$, $\lvert f(2)\rvert$ 정확하게 계산	1점
	$a<0$이거나 $a \ge 4$일 때 $\lvert f(x)\rvert$의 값이 4보다 크다는 것을 확인	2점
	$0<a<4$이고 $a \ne 1$일때 $\lvert f(x)\rvert$의 값이 4보다 크다는 것을 확인	3점
	$a=1$일 때 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값이 가장 작음을 관찰	2점
	$a=1$일 때 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값이 4임을 확인	1점
[2-2] (1)	이차방정식 $f(t)=t^2+at+b=0$의 두 근이 A^2보다 크다는 것을 확인	2점
	$-a>2A^2$임을 확인	3점
	$F'(x)=0$의 0이 아닌 실근의 절댓값이 $\sqrt{-\frac{a}{2}}$이고 A보다 크다는 것을 확인	5점
[2-2] (2)	이차방정식 $f(x)=x^2-x+c=0$의 서로 다른 두 실근이 r^2, s^2임을 확인	2점
	$\int_{-s}^{s}(x^4-x^2+c)\,dx=0$의 적분을 풀어 식을 얻음	3점
	$s^2=\frac{5}{6}$을 구함	3점
	$c=\frac{5}{36}$로 답을 구함	2점
[2-2] (3)	$m=1$을 구함	2점
	$a=-6$와 $L(x)$의 일차항의 계수가 1임을 구함	1점
	$b=5$ 혹은 $t=1+\sqrt{5}$를 구함	5점
	일차함수 $L(x)=x-\frac{11}{2}$임을 구함	2점